1

Левоинвариантные почти комплексные структуры и ассоциированные метрики на четырехмерных прямых произведениях групп Ли

Корнев Е. С.

28 декабря 2006 г.

Введение

Работа посвящена изучению специальных классов почти комплексных структур на четырехмерных прямых произведениях групп Ли, и связанных с этими почти комплексными структурами левоинвариантных метрик. Наряду с хорошо известным классом ортогональных почти комплексных структур, вводятся ещё два новых класса почти комплексных структур (приводимые и антиприводимые структуры), которые естественным образом возникают из геометрических соображений. С приводимыми и антиприводимыми почти комплексными структурами связываются некоторые классы левоинвариантных метрик (ассоциированные метрики) с помощью которых на некоторых группах Ли удается получить левоинвариантные кэлеровы локально конформно кэлеровы и эйнштейновы метрики. Для ассоциированных метрик находятся скалярная и секционная кривизна, тензор Риччи, и изучаются их свойства. Для всех классов почти комплексных структур даётся критерий интегрируемости и вид интегрируемых структур в фиксированном базисе.

Хорошо известно что на двумерном многообразии любая почти комплексная структура является интегрируемой (комплексной), поэтому случай размерности 4 даёт первые нетривиальные примеры многообразий, допускающих неинтегрируемые почти комплексные структуры. Поскольку пространство левоинвариантных почти комплексных структур на группе Ли размерности $2\,n$ изоморфно однородному пространству $\mathrm{GL}(2\,n,\mathbb{R})/\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, которое имеет достаточно большую размерность, то, как правило, рассматривают специальные классы почти комплексных структур. Обычно на группах Ли рассматривают левоинвариантные почти комплексные структуры, сохраняющие заданную метрику или симплектическую форму. Для построения приводимой или антиприводимой почти комплексной структуры достаточно задать только пару взаимно дополнительных распределений касательных подпространств. Однако, в работе показывается, что для таких структур можно построить левоинвариантную метрику и внешнюю два форму, которые они сохраняют. Впервые аналог понятия приводимой почти комплексной структуры возник в [10] при рассмотрении расслоения Хопфа $\S^3\times\S^1$. что позволяет обобщить это понятие на произвольное расслоение $G\times K$, где G - группа Ли нечетной размерности, и K - однопараметрическая группа, действующая на G правыми сдвигами.

В работе дается полная классификация левоинвариантных ортогональных почти комплексных структур в случае размерности 4, находится вид левоинвариантных приводимых

*Кемеровский Государственный Университет

и антиприводимых почти комплексных структур и ассоциированных с ними метрик, а также выводятся формулы выражающие основные геометрические характеристики ассоциированных метрик через структурные константы алгебры Ли группы Ли.

Будем обозначать через $E(1)$ группу аффинных преобразований прямой $\mathbb{R}$, а через H_3 - трехмерную матричную группу Гейзенберга. Группа $E(1)$ состоит из функций вида $f(x) = ax+b, a, b \in \mathbb{R}$. Будем отождествлять эту группу с матричной группой, состоящей из матриц вида:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Известно (см. например [11, 9]) что любая четырехмерная Алгебра ли является либо прямым, либо полупрямым произведением алгебр Ли меньшей размерности. Причем любое прямое произведение изоморфно одной из следующих алгебр Ли:

$$\mathfrak{so}(3) \times \mathbb{R},\ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R},\ \mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R},\ \mathfrak{e}(1) \times \mathbb{R}^2,\ \mathfrak{e}(1) \times \mathfrak{e}(1).$$

Данная работа посвящена изучению случая четырехмерного прямого произведения групп Ли, и является первой частью общего исследования левоинвариантных почти комплексных структур и ассоциированных метрик на группах Ли размерности 4.

Содержание

1 Классификация левоинвариантных ортогональных почти комплексных структур.

Пусть G – группа Ли размерности 4 и L_x – отображение левого сдвига на элемент $x \in G$.

Почти комплексной структурой на группе Ли G, называется C^∞-гладкое поле эндоморфизмов $J(x)$, касательного расслоения группы G, такое что для любого $x \in G, J^2(x) = -\mathrm{id}$. Почти комплексная структура J, называется левоинвариантной, если для любого $x \in G, J(x) = dL_x J(e) dL_{x^{-1}}$. Поскольку все инвариантные почти комплексные структуры, полностью определяются своим значением в единице e группы, то их отождествляют с эндоморфизмами алгебры группы G, а при фиксации базиса в алгебре Ли – с вещественными невырожденными матрицами. В дальнейшем будем рассматривать только левоинвариантные почти комплексные структуры, и опускать слово "левоинвариантная'".

Пусть теперь на группе G, задана левоинвариантная псевдариманова метрика g. Почти комплексная структура J, называется ортогональной относительно метрики g (g-ортогональной), если $g(JX, JY) = g(X, Y)$ для любых X и Y из алгебры Ли группы G.

Основной целью этого параграфа, будет описание ортогональных почти комплексных структур, в зависимости от сигнатуры метрики g, в четырехмерном случае. Будем считать, что метрика g имеет канонический (диагональный) вид в некотором фиксированном базисе. В четырехмерном случае, с точностью до знака сигнатура псевдоримановой метрики имеет один из следующих типов: $(+,+,+,+)$ – риманова метрика, $(-,+,+,+)$ и $(-,-,+,+)$.

Теорема 1.1. *Пусть g – левоинвариантная псевдориманова метрика, на группе Ли, размерности 4 и J – матрица почти комплексной структуры в ортонормированном относительно метрики g базисе. Тогда:*

1) Если метрика g – риманова, то множество g-ортогональных почти комплексных структур образует двулистное накрытие двумерной сферы. Каждой точке (a, b, c) на сфере, соответствует пара структур:

$$J^+ = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & -b \\ -b & -c & 0 & a \\ -c & b & -a & 0 \end{bmatrix},$$

и

$$J^- = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & -c & b \\ -b & c & 0 & -a \\ -c & -b & a & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

2) Если метрика g имеет сигнатуру $(-,-,+,+)$, то множество g-ортогональных почти комплексных структур, образует двулистное накрытие двумерной псевдосферы. Каждой точке (a, b, c) на псевдасфере, соответствует пара структур:

$$J^+ = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & -b \\ b & c & 0 & a \\ c & -b & -a & 0 \end{bmatrix},$$

и

$$J^- = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & -c & b \\ b & -c & 0 & -a \\ c & b & a & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

3) Если метрика g имеет сигнатуру $(-,+,+,+)$, то на группе Ли не существует g-ортогональных почти комплексных структур.

Доказательство. Будем обозначать одним и тем же символом метрику и ее матрицу, в ортонормированном базисе. А единичную матрицу будем обозначать через id.

1) Пусть g – риманова метрика, и J – ортогональная, относительно этой метрики, структура. Матрица g – это просто единичная матрица. Условие ортогональности, в матричной форме, имеет вид:

$$JJ^t = \mathrm{id}$$

Складывая это равенство с равенством $J^2 = -\,\mathrm{id}$, получаем:

$$J(J + J^t) = 0$$

Поскольку матрица J – невырождена, то $J = -J^t$. т. е.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Из условия $J^2 = -\,\mathrm{id}$, получаем:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a^2 + d^2 + e^2 = 1 \\ b^2 + d^2 + f^2 = 1 \\ c^2 + e^2 + f^2 = 1 \\ bd + ce = 0 \\ ad - cf = 0 \\ ae + bf = 0 \\ ab + ef = 0 \\ ac - df = 0 \\ bc + de = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет два типа решений:

$$d = c, e = -b, f = a, a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

и

$$d = -c, e = b, f = -a, a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Подставляя эти решения в (1.3), получаем структуры вида (1.1), лежащие над точкой сферы $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

2) Если метрика G имеет сигнатуру $(-, -, +, +)$, то

$$g = \begin{bmatrix} -\mathrm{id}_2 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_2 \end{bmatrix}$$

Записывая условия ортогональности, для структуры J, получаем:

$$J^t g J = g$$

Пользуясь тем, что $G^{-1} = g^t = g$, получаем:

$$gJ^tgJ = \mathrm{id}$$

Складывая это равенство с равенством $J^2 = -\mathrm{id}$, получаем:

$$(J + gJ^tg) \cdot J = 0$$

Откуда:

$$Jg = -gJ^t$$

Последнее равенство дает следующие условия на компоненты матрицы J:

$$J_k^k = 0, \ k = 1, 2, 3, 4$$

,

$$\begin{array}{l} J_1^2 = -J_2^1 \ J_1^3 = J_3^1 \ J_1^4 = J_4^1 \ J_2^3 = J_3^2 \\ J_2^4 = J_4^2 \ J_3^4 = -J_4^3 \end{array}$$

Откуда:

$$J = \left[\begin{array}{cccc} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ b & d & 0 & f \\ c & e & -f & 0 \end{array} \right] \tag{1.4}$$

Из условия $J^2 = -\mathrm{id}$, получаем:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - c^2 = 1 \\ a^2 - d^2 - e^2 = 1 \\ f^2 - b^2 - d^2 = 1 \\ f^2 - c^2 - e^2 = 1 \\ bd + ce = 0 \\ ad - cf = 0 \\ ae + bf = 0 \\ ab + ef = 0 \\ ac - df = 0 \\ bc + df = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет два типа решений: $d = c, e = -b, f = a, a^2 - b^2 - c^2 = 1$ и $d = -c, e = b, f = -a, a^2 - b^2 - c^2 = 1$. Подставляя эти решения в (1.7), получаем структуры вида (1.2), лежащие над точкой псевдосферы $a^2 - b^2 - c^2 = 1$.

3) Если метрика g имеет сигнатуру $(-, +, +, +)$, то

$$g = \left[\begin{array}{ll} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_3 \end{array} \right].$$

Для G-ортогональной структуры J, так же как в пункте 2) получаем:

$$Jg = -gJ^t$$

откуда:
$$J_k^k = 0,\ \ k = 1, 2, 3, 4$$
,
$$J_1^2 = J_2^1\ J_1^3 = J_3^1\ J_1^4 = J_4^1\ J_2^3 = -J_3^2$$
$$J_2^4 = -J_4^2\ J_3^4 = -J_4^3$$
т. е.
$$J = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d & e \\ b & -d & 0 & f \\ c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}.$$
Из условия $J^2 = -\operatorname{id}$, получаем:
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = -1 \\ a^2 - d^2 - e^2 = -1 \\ b^2 - d^2 - f^2 = -1 \\ c^2 - e^2 - f^2 = -1 \\ bd + ce = 0 \\ ad - cf = 0 \\ ae + bf = 0 \\ ab - ef = 0 \\ ac + df = 0 \\ bc - de = 0 \end{cases}$$
Очевидно, что эта система не имеет вещественных решений. □

Замечание 1.2. *Указанные в теореме почти комплексные структуры J^+ сохраняют ориентацию на группе, а J^- меняют ориентацию на противоположную. Поэтому, если ограничиться только ортогональными структурами, сохраняющими ориентацию, то такие структуры параметризуются точками сферы или псевдосферы.*

Следствие 1.3. *Пусть W – множество g-ортогональных почти комплексных структур, сохраняющих ориентацию на четырехмерной группе Ли. Тогда: Если метрика G – риманова, то множество W – компактно и связно. Если g – псевдориманова метрика сигнатуры $(-,-,+,+)$, то множество W – некомпактно, и является объединением двух непересекающихся связных подмножеств.*

Это непосредственно следует из параметризации множества W, точками соответствующих поверхностей.

2 Ассоциированные и приводимые почти комплексные структуры.

Пусть J – левоинвариантная почти комплексная структура, на группе Ли G, с заданной левоинвариантной метрикой g. Если структура J – ортогональна относительно метрики g, то с парой J, g можно связать внешнюю 2-форму Ω, заданную следующим образом:

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY) \qquad \text{для всех } X \text{ и } Y \text{ из алгебры Ли группы } G.$$

Форма Ω называется фундаментальной формой на группе G. Из ортогональности структуры J сразу следует, что:

$$g(X, Y) = \Omega(JX, Y).$$

Почти комплексная структура J, на группе Ли размерности $2\,n$, называется интегрируемой или комплексной, если на группе можно ввести вещественные координаты $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, такие что:

$$J\partial/\partial x_1 = \partial/\partial y_1, \ldots, J\partial/\partial x_n = \partial/\partial y_n.$$

Это, фактически, означает что действие оператора J можно отождествить с умножением на мнимую единицу i и ввести на группе комплексные координаты $(z_1, \ldots, z_n)$, $z_k = x_k + iy_k, k = 1, \ldots, n$, такие что:

$$J\partial/\partial z_k = i\partial/\partial z_k,\ J\partial/\partial \bar{z}_k = -i\partial/\partial \bar{z}_k,$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right),\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right).$$

Если фундаментальная форма Ω – замкнута, а структура J – интегрируема, то метрика g называется кэлеровой (а в случае псевдоримановой метрики – псевдокэлеровой). Этот класс метрик наиболее популярен, и активно изучается в римановом случае. Если J – комплексная структура, ортогональная относительно римановой метрики g, то пара J, g называется эрмитовой (а в случае псевдоримановой метрики – псевдоэрмитовой) структурой.

Тензором Нейенхейса почти комплексной структуры J, называется тензор N, типа (2,1), определяемый (на алгебре Ли группы G), следующим образом:

$$N(X, Y) = 2\left([JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]\right) \tag{2.1}$$

Критерием интегрируемости почти комплексной структуры является следующая теорема:

Теорема 2.1. [14, том 2.] *Пусть J – гладкая почти комплексная структура на дифференцируемом многообразии и N – ее тензор Нейенхейса. Тогда структура J интегрируема, тогда, и только тогда, когда тензор N тождественно равен нулю.*

Если на группе Ли G задана внешняя невырожденная 2-форма Ω, и почти комплексная структура J сохраняет форму Ω, т. е.

$$\Omega(JX, JY) = \Omega(X, Y) \qquad \text{для всех } X \text{ и } Y \text{ из алгебры Ли группы } G,$$

то говорят, что структура J – ассоциирована с формой Ω. С каждой ассоциированной почти комплексной структурой, можно связать метрику g_J, заданную следующим образом:

$$g_J(X, Y) = \Omega(JX, Y) \qquad \text{для всех } X \text{ и } Y \text{ из алгебры Ли группы } G.$$

Такие метрики называют ассоциированными. Очевидно, что всем таким метрикам соответствует одна и та же фундаментальная форма Ω.

Поскольку, в случае размерности 4, инвариантную почти комплексную структуру можно отождествить с вещественной матрицей порядка 4, квадрат которой равен $-\,\mathrm{id}$, то задача нахождения всех почти комплексных структур, в фиксированном базисе, сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Вещественные решения этой системы определяют многообразие $GL(4,\mathbb{R})/GL(2,\mathbb{C})$ размерности 8, всех инвариантных почти комплексных структур. Поэтому классифицировать почти комплексные структуры в общем случае трудно и приходится рассматривать специальные классы структур. Два таких класса (ортогональные и ассоциированные с внешней 2-формой) были введены выше.

Введем еще один важный класс почти комплексных структур. Пусть G – группа Ли размерности $4n$, B – $2\,n$-мерное распределение на G и $B^{\perp}$ – распределение дополнительное к B.

Определение 2.2. *Приводимой почти комплексной структурой, ассоциированной с парой распределений B и $B^{\perp}$, называется почти комплексная структура J, инвариантно действующая на B и $B^{\perp}$, т. е. для любых $u \in B$ и $v \in B^{\perp}$, $Ju \in B, Jv \in B^{\perp}$.*

Приводимые почти комплексные структуры естественным образом возникают, когда группа является расслоением и одно распределение является касательным к базе расслоения, а другое распределение является касательным к слою. Сама структура J, в этом случае, является совокупностью двух структур, заданных на базе расслоения и на слое. Первым примером такого рода, стали почти комплексные структуры на расслоении Хопфа, рассмотренные П. Годушоном в [10].

Пусть G – группа Ли размерности 4, и e_1, e_2, e_3, e_4 – базис ее алгебры Ли. Тогда эту алгебру можно представить в виде прямой суммы двух двумерных подпространств $B \oplus B^{\perp}$ многими способами. В дальнейшем мы будем выбирать базис специальным образом так, чтобы распределения B и $B^{\perp}$ порождались бы векторами базиса.

Классификацию приводимых почти комплексных структур в этом базисе, дает следующая теорема:

Теорема 2.3. *Пусть J – приводимая почти комплексная структура на четырехмерной группе Ли G, ассоциированная с парой распределений B и $B^{\perp}$. Тогда:*

1) Если $B = \{e_1, e_2\}, B^{\perp} = \{e_3, e_4\}$, то

$$J = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & -\alpha \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

2) Если $B = \{e_1, e_3\}, B^{\perp} = \{e_2, e_4\}$, то

$$J = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ c_1 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & -a_2 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

3) Если $B = \{e_1, e_4\}, B^{\perp} = \{e_2, e_3\}$, то

$$J = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & -\alpha & 0 \\ c & 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

причем

$$a^2 + bc = \alpha^2 + \beta\gamma = -1 \tag{2.5}$$

$$a_1^2 + b_1 c_1 = a_2^2 + b_2 c_2 = -1 \tag{2.6}$$

Доказательство. 1) Имеем:

$$Je_1 = ae_1 + ce_2, Je_2 = be_1 + de_2, Je_3 = \alpha e_3 + \gamma e_4, Je_4 = \beta e_3 + \delta e_4.$$

Откуда:

$$J = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Из условия $J^2 = -\operatorname{id}$ получаем:

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1, \\ b(a+d) = 0, \\ c(a+d) = 0, \\ d^2 + bc = -1, \\ \alpha^2 + \beta\gamma = -1, \\ \beta(\alpha+\delta) = 0, \\ \gamma(\alpha+\delta) = 0, \\ \delta^2 + \beta\gamma = -1. \end{cases}$$

Из условий $bc = -a^2 - 1 < 0, \beta\gamma = -\alpha^2 - 1 < 0$, следует что $b \neq 0, c \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$. Следовательно $d = -a, \delta = -\alpha$.

2) Имеем:

$$Je_1 = a_1 e_1 + c_1 e_3,\ Je_2 = a_2 e_2 + c_2 e_4,\ Je_3 = b_1 e_1 + d_1 e_3,\ Je_4 = b_2 e_2 + d_2 e_4$$

Откуда:

$$J = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Где A, B, C, D – диагональные блоки порядка 2. Поскольку все эти блоки взаимно коммутируют, то из условия $J^2 = -\operatorname{id}$, получаем:

$$\begin{cases} A^2 + BC = -\operatorname{id}, \\ B(A+D) = 0, \\ C(A+D) = 0, \\ D^2 + BC = -\operatorname{id}. \end{cases}$$

Из условия $A^2 = -BC - \operatorname{id}$, следует что:

$$\det(B)\det(C) = \det(\operatorname{id} + A^2) = (1 + a_1^2)(1 + a_2^2) > 0.$$

Это означает, что матрицы B и C – невырождены, и следовательно $D = -A$.

Доказательство пункта 3) аналогично доказательству пункта 1). □

В дальнейшем будем обозначать структуры вида (2.2) через J_1, структуры вида (2.3) через J_2, а структуры вида (2.4) через J_3.

Замечание 2.4. *Из равенств (2.5) и (2.6) видно, что* $\mathrm{sign}(b) \neq \mathrm{sign}(c)$, $\mathrm{sign}(\beta) \neq \mathrm{sign}(\gamma)$, $\mathrm{sign}(b_k) \neq \mathrm{sign}(c_k)$ *при* $k = 1, 2$. *Поэтому, полагая* $b > 0, \beta > 0, b_1 > 0, b_2 > 0$, *и выражая из (2.5)* c *и* γ, *а из (2.6)* c_1 *и* c_2, *получаем, что в каждом из трех случаев, множество приводимых почти комплексных структур параметризуется областью пространства* $\mathbb{C}^2 : \{(z_1, z_2) : \mathrm{Im}\ z_1 > 0, \mathrm{Im}\ z_2 > 0\}$, *где* $z_1 = a + bi, z_2 = \alpha + \beta i$. *При заданных условиях имеем:* $c < 0,\ \gamma < 0,\ c_1 < 0,\ c_2 < 0$.

Обозначим через $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4$ – базисные левоинвариантные 1-формы, двойственные базису e_1, e_2, e_3, e_4. Введем следующие левоинвариантные 2-формы:

$$\Omega_1 = \theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4,\ \Omega_2 = \theta^1 \wedge \theta^3 + \theta^2 \wedge \theta^4,\ \Omega_3 = \theta^1 \wedge \theta^4 + \theta^2 \wedge \theta^3.$$

Будем обозначать матрицы этих форм в стандартном базисе 2-форм, теми же символами, что и сами формы. Имеем:

$$J_1^t \Omega_1 J_1 = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta & -\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \Omega_1.$$

Аналогичным образом получаем:

$$J_2^t \Omega_2 J_2 = \Omega_2$$

и

$$J_3^t \Omega_3 J_3 = \Omega_3$$

Это означает, что приводимые структуры J_k сохраняют форму Ω_k, $k = 1, 2, 3$, т. е. являются ассоциированными с соответствующими 2-формами. Теперь с помощью конструкции

$$g_k(X, Y) = \Omega_k(J_k X, Y) \quad (k = 1, 2,),$$

с каждым типом приводимых почти комплексных структур из теоремы 2.3 можно связать ассоциированные псевдоримановы метрики: g_1, g_2, g_3.

Таким образом, при фиксации базиса алгебры Ли четырехмерной группы Ли, на этой группе возникают три семейства метрик:

$$g_1 = -c\,(\theta^1)^2 + 2\,a\theta^1\theta^2 + b\,(\theta^2)^2 - \gamma\,(\theta^3)^2 + 2\,\alpha\theta^3\theta^4 + \beta\,(\theta^4)^2,$$

$$g_2 = -c_1\,(\theta^1)^2 + 2\,a_1\theta^1\theta^3 - c_2\,(\theta^2)^2 + 2\,a_2\theta^2\theta^4 + b_1\,(\theta^3)^2 + b_2\,(\theta^4)^2,$$

$$g_3 = -c\,(\theta^1)^2 + 2\,a\theta^1\theta^4 - \gamma\,(\theta^2)^2 + 2\,\alpha\theta^2\theta^3 + \beta\,(\theta^3)^2 + b\,(\theta^4)^2,$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям (2.5) и (2.6). в силу замечания 2.4, все левые угловые миноры указанных метрик – положительны, следовательно все эти метрики являются римановыми.

Описанный выше метод построения приводимых почти комплексных структур и ассоциированных метрик требует выбора базиса в алгебре Ли. Однако, если на группе удается определить метрику g инвариантным образом, и ввести одно двумерное распределение B, то второе распределение $B^{\perp}$ можно задать как ортогональное дополнение распределения B относительно метрики g. Если J – приводимая почти комплексная структура, ассоциированная с такими распределениями, то непосредственно из определения 2.2 следует, что при любом выборе базиса в B и $B^{\perp}$, J имеет вид (2.2). Остальные случаи (2.3) и (2.4) сводятся к (2.5) перестановкой индексов базисных векторов.

Пусть снова G группа Ли размерности $4n$, и $B, B^{\perp}$ – пара $2n$-мерных левоинвариантных распределений, прямая сумма которых дает всю алгебру Ли группы G.

Определение 2.5. *Антиприводимой почти комплексной структурой ассоциированной с парой распределений B и $B^{\perp}$ на группе Ли G, называется почти комплексная структура J, такая что для всех $U \in B, JU \in B^{\perp}$, и для всех $V \in B^{\perp}, JV \in B$.*

Геометрически определение 2.5 означает, что почти комплексная структура взаимно переставляет распределения B и $B^{\perp}$.

В четырехмерном случае антиприводимую почти комплексную структуру легко построить следующим образом: Пусть A – невырожденное линейное отображение из B в $B^{\perp}$, e_1, e_2 – базис в B, а e_3, e_4 – базис в $B^{\perp}$. Положим:

$$Je_1 = Ae_1 = v_1 \in B^{\perp}, Je_2 = Ae_2 = v_2 \in B^{\perp}, Jv_1 = -e_1 = -A^{-1}v_1, Jv_2 = -e_2 = -A^{-1}v_2.$$

Из этих равенств видно, что J является антиприводимой почти комплексной структурой. Поскольку распределения B и $B^{\perp}$ – изоморфны, то матрицу отображения A^{-1} можно отождествить с обратной матрицей отображения A, следовательно в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 структура J имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & -A^{-1} \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, любое невырожденное линейное преобразование двумерного векторного пространства порождает левоинвариантную антиприводимую почти комплексную структуру на четырехмерной группе Ли, и обратно.

Классификацию антиприводимых почти комплексных структур на группе Ли размерности 4, в фиксированном базисе, дает следующая теорема:

Теорема 2.6. *Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 – базис алгебры Ли группы Ли размерности 4, и $\hat{J}$ – антиприводимая почти комплексная структура ассоциированная с парой левоинвариантных двумерных распределений B и $B^{\perp}$, тогда:*

1) Если $b = \{e_1, e_2\}, B^{\perp} = \{e_3, e_4\}$, то $\hat{J}$ имеет вид:

$$\hat{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d/D & b/D \\ 0 & 0 & c/D & -a/D \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) Если $B = \{e_1, e_3\}, B^{\perp} = \{e_2, e_4\}$, то $\hat{J}$ имеет вид:

$$\hat{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -d/D & 0 & b/D \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & c/D & 0 & -a/D \\ c & 0 & d & \end{bmatrix}.$$

3) Если $B = \{e_1, e_4\}, B^\perp = \{e_2, e_3\}$, то $\hat{J}$ имеет вид:

$$\hat{J}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -d/D & b/D & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \\ 0 & c/D & -a/D & 0 \end{bmatrix},$$

где $D = ad - bc \neq 0$.

Доказательство. Пусть $B = \{e_1, e_2\}, B^\perp = \{e_3, e_4\}$. Как было показано выше, антиприводимая почти комплексная структура ассоциированная с распределениямиB и $B^\perp$ определяется невырожденным линейным отображением A. Положим $Ae_1 = ae_3 + ce_4, Ae_2 = be_3 + de_4$. Поскольку матрица самой структуры имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & -A^{-1} \\ A & 0 \end{bmatrix},$$

и

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad -A^{-1} = \begin{bmatrix} -d/D & b/D \\ c/D & -a/D \end{bmatrix},$$

и мы получаем структуру $\hat{J}_1$.

После применения к индексам базисных векторов перестановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

и

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

структура $\hat{J}_1$ трансформируется в $\hat{J}_2$ и $\hat{J}_3$ соответственно. □

Обозначим через $\hat{g}$ левоинвариантную метрику относительно которой базис e_1, e_2, v_1, v_2 является ортонормированным. Тогда антиприводимая почти комплексная структура $\hat{J} : \hat{J}e_1 = v_1, \hat{J}e_2 = v_2, \hat{J}v_1 = -e_1, \hat{J}v_2 = -e_2$, является ортогональной относительно метрики $\hat{g}$. Матрица этой метрики в базисе e_1, e_2, v_1, v_2 является единичной. А матрица перехода к этому базису для антиприводимых почти комплексных структур из теоремы 2.6 имеет вид: Для структуры $\hat{J}_1$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix},$$

для структуры $\hat{J}_2$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix},$$

для структуры $\hat{J}_3$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь, используя формулу замены базиса в метрике $g = P^t \hat{g} P$, находим матрицы метрик инвариантных относительно структур $\hat{J}_1, \hat{J}_2$ и $\hat{J}_3$ соответственно, в базисе e_1, e_2, e_3, e_4:

$$\hat{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + c^2 & ab + cd \\ 0 & 0 & ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{g}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 & ab + cd \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & ab + cd & 0 & b^2 + d^2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{g}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & ab + cd & 0 \\ 0 & ab + cd & b^2 + d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\det \hat{g}_1 = \det \hat{g}_2 = \det \hat{g}_3 = D^2$, то все эти метрики являются римановыми.

В заключении отметим, что если на группе Ли задана фундаментальная 2-форма Ω, полученная из метрики g с помощью g-ортогональной почти комплексной структуры J_0, то все почти комплексные структуры ассоциированные с формой Ω, находятся по формуле [7, глава 9.]:

$$J = J_0(\mathrm{id} + P)(\mathrm{id} - P)^{-1},$$

где P – эндоморфизм алгебры Ли группы G, такой что: $J_0 P = -P J_0$, P – симметричен относительно метрики g, и оператор $\mathrm{id} - P^2$ – невырожден. Более подробно см. [7, глава 9.].

3 Вывод основных вычислительных формул

В этом разделе будут выведены необходимые для дальнейших вычислений формулы, выражающие основные геометрические объекты через структурные константы алгебры Ли группы Ли.

Пусть G – группа Ли четной размерности n, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, $e_1, \dots, e_n$ – базис алгебры $\mathfrak{g}$, и $\theta^1, \dots, \theta^n$ – двойственный базис левоинвариантных 1-форм. Тогда:

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k \tag{3.1}$$

Очевидно, что
$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k \qquad \text{для всех } i,j,k.$$
Пусть J – почти комплексная структура на группе G. Тогда:
$$Je_i = \sum_{k=1}^{n} J_i^k e_k.$$
Подставляя это разложение вместе с разложением (3.1) в формулу (2.1), получаем:
$$N(e_i,e_j) = \sum_{k=1}^{n}\left(2\sum_{l,m=1}^{n}\left(J_i^l J_j^m C_{lm}^k + J_i^l J_m^k C_{jl}^m - J_j^l J_m^k C_{il}^m\right) - 2\,C_{ij}^k\right) e_k$$
Откуда:
$$\boxed{N_{ij}^k = 2\sum_{l,m=1}^{n}\left(J_i^l J_j^m C_{lm}^k + J_i^l J_m^k C_{jl}^m - J_j^l J_m^k C_{il}^m\right) - 2\,C_{ij}^k} \tag{3.2}$$
Последняя формула выражает компоненты тензора Нейенхейса через структурные константы, и является основным инструментом при выяснении вопроса об интегрируемости почти комплексной структуры.

Пусть ω – левоинвариантная 1-форма на группе G. Тогда из известной формулы [14]:
$$d\omega(X,Y) = -1/2\,\omega([X,Y]) \qquad \text{для всех } X \text{ и } Y \text{ из } \mathfrak{g}$$
Получаем:
$$d\theta^k(e_i,e_j) = -\theta^k([e_i,e_j]) = -\sum_{l=1}^{n} C_{ij}^l \theta^k(e_l) = -C_{ij}^k$$
Откуда:
$$d\theta^k = -1/2\sum_{i<j} C_{ij}^k \theta^i \wedge \theta^j \tag{3.3}$$
Эта формула позволяет по заданным структурным константам, вычислить внешний дифференциал фундаментальной 2-формы и полезна при выявлении на группе симплектических структур и псевдокэлеровых метрик.

Пусть g – левоинвариантная псевдориманова метрика на группе G, и ∇ – связность Леви-Чивитты этой метрики. Будем обозначать компоненты метрики g через g_{ij}, а компоненты метрики g^{-1} – через g^{ij}. (дальше подразумевается символика суммирования по повторяющемуся индексу) Тогда:
$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k \tag{3.4}$$
для связности Леви-Чивитты левоинвариантной метрики, имеет место известная формула (см. [4]):
$$g(\nabla_X Y, Z) = 1/2\,\left(g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)\right),$$
подставляя в эту формулу разложение (3.4), Получаем:
$$\Gamma_{ij,l} = \Gamma_{ij}^k g_{kl} = g(\nabla_{e_i} e_j, e_l) = 1/2\,\left(g([e_i,e_j],e_l) - g([e_j,e_l],e_i) + g([e_l,e_i],e_j)\right) =$$
$$= 1/2\,\left(C_{ij}^k g_{kl} - C_{jl}^k g_{ki} + C_{li}^k g_{kj}\right).$$

Поскольку $\Gamma_{ij}^k = g^{kl}\Gamma_{ij,l}$, то окончательно получаем:

$$\Gamma_{ij}^k = 1/2\, g^{kl}\ \left(C_{ij}^m g_{ml} - C_{jl}^m g_{mi} + C_{li}^m g_{mj}\right) \tag{3.5}$$

Определим теперь тензор кривизны метрики g как тензор R типа $(2,1)$, заданный на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ следующим образом:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

Подставляя в эту формулу разложения (3.1) и (3.5), получаем:

$$R(e_i,e_j)e_k = R_{ijk}^l e_l = \left(\Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^l - \Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^l - C_{ij}^m\Gamma_{mk}^l\right)$$

Откуда:

$$R_{ijk}^l = \Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^l - \Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^l - C_{ij}^m\Gamma_{mk}^l \tag{3.6}$$

Тензором Риччи метрики g, называется тензор S типа $(2,0)$, определяемый на алгебре $\mathfrak{g}$ следующим образом:

$$S(X,Y) = g^{ij}g\left(R(e_i,X)Y,e_j\right)$$

Другими словами, тензор Риччи – это свертка тензора кривизны по первому и четвертому индексам. Если существует константа λ, такая что:

$$S(X,Y) = \lambda g(X,Y) \qquad \text{для всех } X \text{ и } Y \text{ из } \mathfrak{g},$$

то метрика g – называется эйнштейновой. Если ортогональная относительно метрики g почти комплексная структура J – сохраняет тензор Риччи, то говорят что тензор Риччи является псевдоэрмитовым, а в случае римановой метрики – эрмитовым. Очевидно, что тензор Риччи эйнштейновой псевдоэрмитовой метрики, всегда является псевдоэрмитовым. Теперь, пользуясь данным определением, выведем формулу для вычисления компонент тензора Риччи. Имеем:

$$S(e_i,e_j) = g^{lm}g\left(R(e_l,e_i)e_j,e_m\right) = g^{lm}g(R_{lij}^v e_v,e_m) = g^{lm}g_{vm}\ \left(\Gamma_{ij}^u\Gamma_{lu}^v - \Gamma_{lj}^u\Gamma_{iu}^v - C_{li}^u\Gamma_{uj}^v\right),$$

т. е.

$$S_{ij} = g^{lm}g_{vm}\ \left(\Gamma_{ij}^u\Gamma_{lu}^v - \Gamma_{lj}^u\Gamma_{iu}^v - C_{li}^u\Gamma_{uj}^v\right).$$

Окончательно, получаем:

$$S_{ij} = \Gamma_{ij}^u\Gamma_{lu}^l - \Gamma_{lj}^u\Gamma_{iu}^l - C_{li}^u\Gamma_{uj}^l \tag{3.7}$$

Кривизной Риччи метрики g, в направлении неизотропного вектора e, называется величина:

$$k_{\mathrm{ric}}(e) = \frac{S(e,e)}{g(e,e)}.$$

Из этой формулы сразу следует, что Кривизна Риччи эйнштейновой метрики – одинакова во всех направлениях.

Скалярной кривизной метрики g, называется свертка тензора Риччи:

$$\sigma = g^{ij}S_{ij} \tag{3.8}$$

Очевидно, что если $g = \lambda S$, то $\sigma = \lambda n$.

Секционной кривизной метрики g, в двумерном направлении $\{X, Y\}$, называется величина:

$$k(X,Y) = \frac{g\left(R(X,Y)Y,X\right)}{g(X,X\,g(Y,Y) - g(X,Y)\,g(X,Y)}.$$

Можно показать, что секционная кривизна не зависит от выбора базиса двумерного направления. Имеем:

$$k(e_i,e_j) = \frac{g(R^m_{ijj}e_m,e_i)}{g_{ii}g_{jj} - g_{ij}} = \frac{g_{im}\left(\Gamma^l_{jj}\Gamma^m_{il} - \Gamma^l_{ij}\Gamma^m_{jl} - C^l_{ij}\Gamma^m_{lj}\right)}{g_{ii}g_{jj} - g^2_{ij}} \tag{3.9}$$

В ортонормированном базисе формула (3.9.22) принимает вид:

$$k(e_i,e_j) = \Gamma^l_{jj}\Gamma^i_{il} - \Gamma^l_{ij}\Gamma^i_{jl} - C^l_{ij}\Gamma^i_{lj} \tag{3.10}$$

Если во всех выше приведенных формулах заменить компоненты связности разложением (3.4), то получатся формулы явно выраженные через структурные константы. Однако они слишком громоздки и мы не будем их приводить.

4 **Группа** $\mathrm{SO}(3)\times S^1$

Как известно группа $\mathrm{SO}(3)$ диффеоморфна $\mathrm{SU}(2)/\pm 1$. Следовательно группа $\mathrm{SU}(2)$ является универсальной накрывающей группы $\mathrm{SO}(3)$, а следовательно они имеют одну и ту же алгебру Ли. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать группу $\mathrm{SU}(2)\times S^1$.

Группа $SU(2)$ состоит из комплексных матриц вида:

$$\begin{bmatrix} z_1 & -\bar z_2 \\ z_2 & \bar z_1 \end{bmatrix},$$

таких что $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. т. е. группа $\mathrm{SU}(2)$ – диффеоморфна трехмерной сфере S^3. Хорошо известно, что алгебра Ли группы $\mathrm{SU}(2)$ изоморфна алгебре $so(3)$, а алгебра Ли окружности S^1 – изоморфна $\mathbb{R}$. Таким образом, алгебра Ли нашей группы есть $\mathfrak{s}o(3)\times\mathbb{R}$. Далее мы будем считать отождествлять алгебру Ли $so(3)$ с пространством $\mathbb{R}^3$ с векторным произведением.

Поскольку группа $\mathrm{SO}(3)$ является простой, то форма Киллинга-Картана B – невырождена и определяет биинвариантную метрику на $\mathrm{SO}(3)$. Обозначим через x_4 евклидову координату в $\mathbb{R}$, и определим биинвариантную метрику на $\mathrm{SU}(3)\times S^1$, следующим образом:

$$g_B(X,X) = -1/2\,B(X,X) + x_4^2 \quad \text{для всех } X \text{ из } \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}.$$

Группа S^1 изоморфна подгруппе в $\mathrm{SU}(2)$, состоящей из матриц вида:

$$A_\phi = \begin{bmatrix} \exp(2\,i\pi\phi) & 0 \\ 0 & \exp(-2\,i\pi\phi) \end{bmatrix}, 0 \leqslant \phi \leqslant 1.$$

Определим правое действие группы S^1 на $\mathrm{SU}(2)$ как умножение на матрицу A_ϕ справа. Тогда векторное поле касательное к орбите действия группы S^1, будет левоинвариантным. Обозначим через e_4 базисный вектор в $\mathbb{R}$, а через e_3 – единичный вектор касательный к орбите действия S^1, в единице группы $\mathrm{SU}(2)$. Выберем вектор e_2 как единичный вектор ортогональный распределению $\{e_3, e_4\}$ относительно метрики g_B, а вектор e_1 как векторное произведение e_2 и e_3 в $\mathbb{R}^3$. Тогда получаем:

$$[e_1,e_2] = e_3,\ [e_1,e_3] = -e_2,\ [e_2,e_3] = e_1,\ [e_k,e_4] = 0,\ k = 1,2,3. \tag{4.1}$$

Из этих формул легко находим структурные константы:

$$C_{12}^3 = -C_{21}^3 = 1,\ C_{13}^2 = -C_{31}^2 = -1,\ C_{23}^1 = -C_{32}^1 = 1. \tag{4.2}$$

Найдем теперь вид метрики g_B в выбранном базисе. Пусть $X \in \mathbb{R}^3$, тогда:

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

Используя (4.1), находим матрицу оператора Ad_X:

$$\mathrm{Ad}_X = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Откуда:

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}_X^2) = -2\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

и следовательно для всех X из $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ имеем:

$$g_B(X, X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Заметим, что распределение $\{e_3, e_4\}$ является касательным к слою расслоения Хопфа $SU(2) \times S^1 \to S^2$, диффеоморфному тору $S^1 \times S^1$, а распределение $\{e_1, e_2\}$ является ортогональным дополнением этого распределения.

Рассмотрим теперь почти комплексные структуры ортогональные относительно метрики g_B. Будем называть нормой тензора Нейенхейса, квадратный корень из суммы квадратов всех его компонент в выбранном базисе.

Напомним, что ортогональные почти комплексные структуры параметризуются точками единичной сферы S^2 в пространстве переменных $a,\ b,\ c$.

Теорема 4.1. *Множество всех левоинвариантных комплексных структур на* $\mathrm{SO}(3) \times S^1$*, ортогональных относительно метрики g_B, и сохраняющих ориентацию на группе, параметризуется точками большой окружности $a = 0$ и точками южного и северного полюсов сферы $b = c = 0$. А ортогональные почти комплексные структуры, имеющие максимальную норму тензора Нейенхейса, равную $\sqrt{2}$, параметризуются точками двух окружностей, радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$, заданных уравнениями $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.*

Доказательство. Пусть J – почти комплексная структура, удовлетворяющая условиям теоремы. Поскольку метрика g_B – риманова, то по теореме 1.1 имеем:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & -b \\ -b & -c & 0 & a \\ -c & b & -a & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Подставляя коэффициенты матрицы (4.3) и значения структурных констант из (4.2) в формулу (3.2) находим ненулевые компоненты тензора Нейенхейса:

$$N_{14}^3 = -N_{34}^1 = 2\,ac,\ N_{34}^2 = -N_{24}^3 = 2\,ab.$$

Откуда:
$$\|N\| = \sqrt{8\,a^2\,(b^2+c^2)} = 2\,\sqrt{2}|a|\sqrt{1-a^2}.$$
Очевидно, что норма тензора Нейенхейса обращается в 0 в двух случаях:

1) $a = 0,\ b^2 + c^2 = 1.$

2) $a = \pm 1,\ b = c = 0.$

Подставляя эти значения в (4.3), получаем вид ортогональных комплексных структур:
$$J_{b,c} = \begin{bmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{bmatrix},$$
где
$$D = \begin{bmatrix} b & c \\ c & -b \end{bmatrix},$$
$$J_{\pm} = \begin{bmatrix} \pm I & 0 \\ 0 & \pm I \end{bmatrix},$$
где
$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку функция $\|N\|$ является четной по переменной a, то достаточно найти максимум этой функции при $0 \leqslant a \leqslant 1$. С помощью вычисления производной, находим точку максимума:
$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Откуда:
$$\max \|N\| = \sqrt{2}$$
и
$$b^2 + c^2 = 1/2.$$

□

Замечание 4.2. *Структуры $J_{b,c}$ имеют явный геометрический смысл: они взаимно переставляют заданные двумерные распределения, т. е. являются антиприводимыми. Композиция двух таких структур уже не является почти комплексной структурой, однако дает оператор инвариантно действующий на заданных распределениях.*

Обозначим через $\theta^k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$ базисные 1-формы двойственные векторам e_k. Зафиксируем эрмитову структуру g_B, J_+, и обозначим через Ω_0 ее фундаментальную 2-форму. Тогда в силу раздела 2 получаем:
$$\Omega_0 = \theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4.$$

Подставляя в формулу (3.3) значения структурных констант из (4.2), находим:
$$d\theta^1 = -1/2\,\theta^2 \wedge \theta^3,\ d\theta^2 = 1/2\,\theta^1 \wedge \theta^3,\ d\theta^3 = 1/2\,\theta^1 \wedge \theta^2,\ d\theta^4 = 0.$$

Откуда получаем:
$$d\Omega_0 = -1/2\,\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^4.$$
т. е. метрика g_B – некэлерова. Более того имеет место следующий факт:

Лемма 4.3. *Группа Ли* $\mathrm{SO}(3) \times S^1$ *не допускает левоинвариантных симплектических структур и левоинвариантных не Риччи-плоских эйнштейновых метрик.*

Доказательство. Пусть Ω – замкнутая 2-форма на $\mathrm{SO}(3) \times S^1$. Тогда:

$$\Omega = a\theta^1 \wedge \theta^2 + b\theta^1 \wedge \theta^3 + c\theta^2 \wedge \theta^3 + \alpha\omega' \wedge \theta^4,$$

где ω' – 1-форма на $\mathrm{SO}(3)$. Поскольку форма ω' является линейной комбинацией форм $\theta^1, \theta^2, \theta^3$, то $d\omega' \wedge \theta^4 \neq 0$. Имеем:

$$d\Omega = \alpha d\omega' \wedge \theta^4 = 0,$$

откуда $\alpha = 0$, а следовательно форма Ω вырождается в направлении e_4. таким образом, любая левоинвариантная 2-форма – вырождена, а значит на $\mathrm{SO}(3) \times S^1$ не существует левоинвариантных симплектических структур.

Пусть теперь g – левоинвариантная риманова эйнштейнова метрика с ненулевым тензором Риччи S. Выберем ортонормированный относительно метрики g базис f_1, f_2, f_3, f_4 алгебры Ли $so(3) \times \mathbb{R}$, такой что $f_4 \in \mathbb{R}$. Поскольку вектор f_4 порождает центр этой алгебры Ли, то:

$$\nabla_{f_4} f_k = \nabla_{f_k} f_4 = 0, k = 1, 2, 3, 4.$$

Теперь, пользуясь этим равенством и определением тензора Риччи данным в разделе 3, находим что $S(f_4, f_4) = 0$. Поскольку для эйнштейновой метрики кривизна Риччи постоянна во всех направлениях, то получаем:

$$S(f_k, f_k) = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, 3,$$

что противоречит условию $S \neq 0$. □

По теореме 2.3, приводимые почти комплексные структуры ассоциированные с распределениями $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_3, e_4\}$ имеют вид:

$$J = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & -\alpha \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

с выполнением условий(2.5). А по теореме 2.6,антиприводимые почти комплексные структуры ассоциированные с этими же распределениями, имеют вид:

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d/D & b/D \\ 0 & 0 & c/D & -a/D \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

, где

$$D = ad - bc.$$

Теорема 4.4. *Множество приводимых комплексных структур на* $\mathrm{SO}(3)\times S^1$*, ассоциированных с распределениями* $\{e_1, e_2\}$ *и* $\{e_3, e_4\}$ *образует двупараметрическое семейство вида:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & -\alpha \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

где

$$\alpha^2 + \beta\gamma = -1.$$

А множество антиприводимых комплексных структур ассоциированных с теми же распределениями, образует однопараметрическое семейство вида:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a & -b \\ 0 & 0 & -b & a \\ a & b & 0 & 0 \\ b & -a & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$a^2 + b^2 = 1.$$

т.е. параметризуется точками единичной окружности.

Доказательство. Пусть N – тензор Нейенхейса структуры вида (4.4). Тогда подставляя коэффициенты матрицы (4.4) и значения структурных констант из (4.2) в формулу (3.2), находим:

$$\begin{aligned}
N_{13}^2 &= -2\,(a^2 + c^2 - 2\,a\alpha - 1), \\
N_{14}^1 &= -N_{24}^2 = 2\,\beta(b + c), \\
N_{14}^2 &= N_{24}^1 = -4\,a\beta, \\
N_{23}^1 &= 2\,(a^2 + b^2 - 2\,a\alpha - 1), \\
N_{23}^2 &= 2\,c(a - \alpha) - 2\,b(a + \alpha).
\end{aligned}$$

Из условий $N_{ij}^k = 0$ и $a^2 + bc = -1$, находим:

$$a = 0,\ b = -c = 1,\ \alpha^2 + \beta\gamma = -1.$$

Подставляя эти значения в (4.4), получаем структуры вида (4.6).

Пусть теперь $\hat{N}$ – тензор Нейенхейса структуры вида (4.5). Снова подставляя коэффициенты структуры (4.5) и структурные константы из (4.2) в (3.2), находим ненулевые компоненты тензора $\hat{N}$:

$$\begin{aligned}
&\hat{N}_{12}^3 = 2\,(a^2+b^2-1),\\
&\hat{N}_{12}^4 = 2\,(ac+bd),\\
&\hat{N}_{13}^1 = -2\,c\tfrac{aD-d}{D^2},\\
&\hat{N}_{13}^2 = -2\,\tfrac{adD+c^2-D^2}{D^2},\\
&\hat{N}_{14}^1 = 2\,a\tfrac{aD-d}{D^2},\\
&\hat{N}_{14}^2 = 2\,a\tfrac{bD+c}{D^2},\\
&\hat{N}_{23}^1 = -2\,\tfrac{bcD-d^2+D^2}{D^2},\\
&\hat{N}_{23}^2 = -2\,d\tfrac{bD+c}{D^2},\\
&\hat{N}_{24}^1 = 2\,b\tfrac{aD-d}{D^2},\\
&\hat{N}_{24}^2 = 2\,b\tfrac{bD+c}{D^2},\\
&\hat{N}_{34}^3 = -2\,a^2D+b^2Dbc-adD^2,\\
&\hat{N}_{34}^4 = -2\,\tfrac{ac+bd}{D}.
\end{aligned}$$

Приравнивая эти компоненты к нулю, находим что $N=0$ при $D=-1, b=c, d=-a, a^2+b^2=1$. Подставляя эти значения в матрицу (4.5), находим вид антиприводимых комплексных структур. □

Пусть теперь J – комплексная структура вида (4.6). Тогда методом описанным в разделе 2, с использованием формы Ω_0 получаем двупараметрическое семейство ассоциированных эрмитовых метрик:

$$g_1(X,X) = \Omega_0(JX,X) = x_1^2+x_2^2-\gamma x_3^2+2\,\alpha x_3x_4+x_4^2.$$

Подставляя в (3.5) значения структурных констант из (4.2), находим ненулевые компоненты связности метрики g_1:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = 1/2,\\
&\Gamma_{13}^2 = -\Gamma_{23}^1 = \tfrac{\gamma}{2},\\
&\Gamma_{14}^2 = -\Gamma_{24}^1 = \Gamma_{41}^2 = -\Gamma_{42}^1 = -\tfrac{\alpha}{2},\\
&\Gamma_{31}^2 = -\Gamma_{32}^1 = \tfrac{\gamma}{2}+1.
\end{aligned}$$

Подставляя значения структурных констант и компонент связности в (3.7), находим тензор Риччи метрики g_1:

$$S_1 = \left(1-\frac{\gamma}{2}\right)(\theta^1)^2+\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)(\theta^2)^2-\left(\frac{\gamma^2}{2}-2\right)(\theta^3)^2+\alpha\gamma\theta^3\theta^4-\frac{\alpha^2}{2}(\theta^4)^2.$$

Покажем что этот тензор Риччи не является эрмитовым при всех значениях параметров. Действительно, если комплексная структура J вида (4.6) сохраняет тензор S_1, то поскольку $Je_1 = -e_2$ и $Je_2 = e_1$, имеем:

$$1+\frac{\gamma}{2} = S_1(e_1,e_1) = S_1(e_2,e_2) = 1-\frac{\gamma}{2}.$$

Но это равенство не выполняется при $\gamma<0$.

Теперь, используя формулу (3.8), находим скалярную кривизну метрики g_1:

$$\sigma = 2\,\beta-\frac{\gamma}{2} = 2\,\beta+\frac{\alpha^2+1}{2\,\beta}.$$

Поскольку $\sigma \geqslant 2\,\beta+\frac{1}{2\,\beta}$, а минимум этой функции достигается при $\beta=1/2$, и равен 2, то получаем:

$$\sigma \geqslant 2,\ \sigma = 2 \quad \text{при } \alpha=0, \beta=1/2, \gamma=-2.$$

т. е. метрика, имеющая минимальную скалярную кривизну, имеет вид:

$$g_{\min} = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 + 2\,(\theta^3)^2 + 1/2\,(\theta^4)^2.$$

Причем тензор Риччи этой метрики вырождается, и имеет вид:

$$S_{\min} = 2\,(\theta^1)^2.$$

Легко проверить, что точка $\alpha = 0, \beta = 1/2, \gamma = -2$ является единственной критической точкой скалярной кривизны σ.

Вычислим секционные кривизны метрики g_1 в базисных двумерных направлениях, используя формулу (3.9). Получаем:

$$\begin{aligned}
&k_1(e_1, e_2) = 3/4\,\gamma + 1,\\
&k_1(e_1, e_3) = k_1(e_2, e_3) = -1/4\,\gamma,\\
&k_1(e_1, e_4) = k_1(e_2, e_3) = \tfrac{\alpha^2}{4\,\beta},\\
&k_1(e_3, e_4) = 0.
\end{aligned}$$

Как видно из этих формул, метрика g_1 имеет знакоопределенную неотрицательную секционную кривизну в базисных направлениях, только при $-4/3 \leqslant \gamma < 0$.

Заметим, что при $\alpha = 0, \gamma = -\beta = -1, g_1 = g_B$. покажем теперь, что метрика g_1 при $\alpha \neq 0, \gamma \neq -1, \beta \neq 1$, не является биинвариантной в отличие от метрики g_B. В [4] доказано, что если g – биинвариантная метрика, то ее секционная кривизна в направлении пары векторов X, Y равна $1/4\,g([X,Y],[X,Y])$. Имеем:

$$1/4\,g_1([e_1, e_2], [e_1, e_2]) = 1/4\,g_1(e_3, e_3) = -1/4\,\gamma \neq 3/4\,\gamma + 1 \quad \text{при } \gamma \neq -1,$$

$$k(e_1, e_4) = 1/4 g_1([e_1, e_4], [e_1, e_4]) = 0 \neq \frac{\alpha^2}{4\,\beta} \quad \text{при } \alpha \neq 0.$$

Т. е. метрика g_1 не является биинвариантной при $g_1 \neq g_B$.

Введем еще одно важное понятие. Псевдо(эрмитова) метрика g на комплексном многообразии M, называется локально конформно псевдо(кэлеровой), если существует открытое покрытие $\{U\}_{\alpha\in \mathrm{A}}$ многообразия M, и семейство дифференцируемых функций $\{f\}_\alpha$, каждая из которых определена на соответствующем элементе покрытия, таких что локальные метрики $h_\alpha = \exp(-f_\alpha)\,g_\alpha$ являются псевдо(кэлеровыми) для всех $\alpha \in \mathrm{A}$. Здесь g_α – сужение метрики g на U_α. Заметим, что из этого определения не следует, что если метрика g – левоинвариантна, то и локальные метрики h_α также левоинвариантны. Основным критерием локальной конформно псевдокэлеровости является доказанная в [5] теорема.

Теорема 4.5. *Пусть g – псевдоэрмитова метрика на комплексном многообразии M, с фундаментальной 2-формой Ω. Тогда метрика g является локально конформно псевдокэлеровой если, и только если, на M существует глобальная замкнутая 1-форма ω, такая что:*

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega.$$

Форма ω называется формой Ли. В нашем случае эрмитовы структуры g_B, J_+ и g_1, J_1 имеют фундаментальную 2-форму

$$\Omega_0 = \theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4,$$

откуда:

$$d\Omega_0 = 1/2\,\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^4 = -1/2\,\theta^4 \wedge \left(\theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4\right) = -1/2\,\theta^4 \wedge \Omega_0.$$

Поскольку 1-форма θ^4 – замкнута, то форма $1/-2\,\theta^4$ является формой Ли, и по теореме 4.5 метрики g_B и g_1 являются локально конформно кэлеровыми.

Таким образом, получен следующий результат:

Теорема 4.6. *Группа Ли* $\mathrm{SO}(3)\times S^1$ *не допускает левоинвариантных кэлеровых метрик, но допускает биинвариантную локально конформно кэлерову метрику, и двупараметрическое семейство локально конформно кэлеровых метрик, со скалярной кривизной не меньше 2.*

5 Группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$

Рассмотрим группу $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. это некомпактная связная группа, состоящая из вещественных матриц порядка 2, с определителем равным 1. Алгебра этой группы состоит из матриц порядка 2, с нулевым следом. Т. Е. любая матрица из $\mathfrak{s}l(2,\mathbb{R})$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}.$$

Определим правое действие группы $\mathbb{R}$ на группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ как умножение справа на матрицу

$$\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}, t\in\mathbb{R}.$$

Тогда векторное поле касательное к орбите этого действия будет левоинвариантным. Обозначим через e_1 значение этого векторного поля в единице группы. Имеем:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Положим:

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку скобка Ли на матричной группе задается в виде:

$$[A,B] = AB - Ba,$$

то выберем третий базисный вектор как $1/2\,[e_1,e_2]$. получаем:

$$e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь можно выписать все скобки Ли:

$$\begin{aligned} [e_1,e_2] &= 2\,e_3, \\ [e_1,e_3] &= 2\,e_2, \\ [e_2,e_3] &= -2\,e_1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Теперь, используя (5.1), находим матрицу оператора Ad_X, полагая $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$:

$$\mathrm{Ad}_X = 2 \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Форма Киллинга-Картана в выбранном базисе имеет вид:

$$B(X, X) = 8\,(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2).$$

Определим теперь псевдориманову метрику на группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, следующим образом:

$$g_B = -1/8\,B + x_4^2 = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

где x_4 – евклидова координата на $\mathbb{R}$. Очевидно,что построенная метрика g_B является биинвариантной. Обозначим через e_4 базисный вектор пространства $\mathbb{R}$. Поскольку $[e_k, e_4] = 0$ при $k = 1, 2, 3$, то из (5.1) получаем ненулевые структурные константы:

$$\begin{aligned} C_{12}^3 &= -C_{21}^3 = 2, \\ C_{13}^2 &= -C_{31}^2 = 2, \\ C_{23}^1 &= -C_{32}^1 = -2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. *Любая g_B-ортогональная почти комплексная структура на группе* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ *– интегрируема.*

Доказательство. Поскольку метрика g_B имеет сигнатуру $(-,-,+,+)$, то по теореме 1.1 g_B-ортогональные почти комплексные структуры имеют вид:

$$J^+ = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & -b \\ b & c & 0 & a \\ c & -b & -a & 0 \end{bmatrix},$$

$$J^- = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & -c & b \\ b & -c & 0 & -a \\ c & b & a & 0 \end{bmatrix},$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = 1.$$

Подставляя коэффициенты матрицы J^+ и значения структурных констант из (5.2) в формулу (3.2), получаем что все компоненты тензора Нейенхейса равны нулю, а следовательно структура J^+ является интегрируемой.

Повторение аналогичных вычислений для структур J^- снова дает нулевой тензор Нейенхейса, и окончательно доказывает теорему. □

Обозначим через $\theta^k, k = 1, 2, 3, 4$ двойственный базис 1-форм. Подставляя в (3.3) значения структурных констант из (5.2), находим:

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 &= -\theta^1 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 &= -\theta^1 \wedge \theta^2, \\ d\theta^4 &= 0. \end{aligned}$$

Лемма 5.2. *Группа* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ *не допускает левоинвариантных симплектических структур и левоинвариантных не Риччи-плоских эйнштейновых метрик.*

Доказательство леммы полностью аналогично доказательству леммы 4.3.

Введем следующие канонические почти комплексные структуры:

$$J_0^+ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$J_0^- = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

где

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Фундаментальная 2-форма псевдоэрмитовой структуры (g_B, J_0^+) имеет вид:

$$\Omega = -\theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4.$$

Получаем,

$$d\Omega = -\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^4 = -\theta^4 \left(-\theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4\right) = -\theta^4 \wedge \Omega.$$

Поскольку форма θ^4 – замкнута, то по теореме 4.5 получаем, что метрика g_B является локально конформно псевдокэлеровой. Таким образом, получен важный пример некомпактного локально конформно псевдокэлерова многообразия.

Заметим, что орбита действия группы $\mathbb{R}$ является максимальным тором в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Поскольку вектор e_4 является касательным к $\mathbb{R}$, а вектор e_1 порождает касательное пространство максимального тора в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, то естественно рассмотреть двумерное распределение $\{e_1, e_4\}$ и его g_B-ортогональное дополнение $\{e_2, e_3\}$. Согласно разделу 2, приводимые почти комплексные структуры ассоциированные с выбранными распределениями $\{e_1, e_4\}$ и $\{e_2, e_3\}$, имеют вид:

$$J = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & -\alpha & 0 \\ c & 0 & 0 & -a \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

$$a^2 + bc = \alpha^2 + \beta\gamma = -1.$$

Эти структуры являются ассоциированными с 2-формой

$$\Omega_1 = \theta^1 \wedge \theta^4 + \theta^2 \wedge \theta^3.$$

А антиприводимые почти комплексные структуры ассоциированные с теми же распределениями имеют вид:

$$\hat{J} = \begin{bmatrix} 0 & -d/D & b/D & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \\ 0 & c/D & -a/D & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.4}$$

$$D = ad - bc.$$

Теорема 5.3. *Группа* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ *не допускает приводимых комплексных структур ассоциированных с распределениями* $\{e_1, e_4\}$ *и* $e_2, e_3\}$. *Но допускает двупараметрическое семейство антиприводимых комплексных структур, ассоциированных с этими же распределениями, вида:*

$$\begin{bmatrix} 0 & -a & c & 0 \\ a & 0 & 0 & cD \\ c & 0 & 0 & aD \\ 0 & c/D & -a/D & 0 \end{bmatrix},$$

$$a^2 - c^2 = 1.$$

Доказательство. Пусть J – почти комплексная структура вида (5.3), тогда, вычисляя ее тензор Нейенхейса с помощью (3.2) и (5.2), находим что

$$N_{24}^3 = -8\,b\alpha, N_{12}^3 = 4\,(2\,a\alpha + \alpha^2 - \gamma^2 - 1).$$

Если структура J – интегрируема, т. е. $N = 0$, то, в силу условия $b > 0$, получаем что $\alpha = 0$, откуда: $\gamma^2 + 1 = 0$, следовательно $\gamma^2 = -1$.

Пусть теперь $\hat{J}$ – структура вида (5.4), и $\hat{N}$ – ее тензор Нейенхейса. Подставляя коэффициенты этой структуры и значения структурных констант из (5.2) в (3.2), находим ненулевые компоненты тензора $\hat{N}$:

$$\begin{aligned}
&\hat{N}_{12}^2 = 4\,c\,(aD - d)/D, \\
&\hat{N}_{12}^3 = -4\,c\,(cD - b)/D, \\
&\hat{N}_{13}^2 = 4\,a\,(aD - d)/D, \\
&\hat{N}_{12}^3 = 4\,a\,(cD - b)/D, \\
&\hat{N}_{14}^1 = -4\,(b^2 - d^2 + D^2)/D, \\
&\hat{N}_{14}^4 = 4\,(ab - cd)/D, \\
&\hat{N}_{23}^1 = 4\,(b^2 - d^2 + D^2)/D^2, \\
&\hat{N}_{23}^4 = -4\,(ab - cd)/D^2, \\
&\hat{N}_{24}^2 = -4\,d\,(aD - d)/D, \\
&\hat{N}_{24}^3 = 4\,d\,(cD - b/D, \\
&\hat{N}_{34}^2 = 4\,b\,(aD - d)/D, \\
&\hat{N}_{34}^3 = -4\,b\,(cD - b)/D.
\end{aligned}$$

Приравнивая эти компоненты к нулю, получаем что $\hat{N} = 0$ при $c = bD, d = aD, a^2 - c^2 = 1, D \neq 0$. Подставляя эти значения в матрицу (5.4), получаем вид антиприводимых комплексных структур. $\square$

Как показано в разделе 2, метрика ассоциированная со структурой вида (5.3) и фундаментальной 2-формой Ω_1 имеет вид:

$$g_1 = -c\,(\theta^1)^2 + 2\,a\theta^1\theta^4 - \gamma\,(\theta^2)^2 + 2\,\alpha\theta^2\theta^3 + \beta\,(\theta^3)^2 + b\,(\theta^4)^2.$$

Эта метрика является римановой и почти эрмитовой при всех допустимых значениях параметров.

Мы не будем приводить выражения тензора Риччи и скалярной кривизны метрики g_1, поскольку они довольно громоздки и мало содержательны. Покажем лишь, что секционная кривизна в любом двумерном направлении, содержащем вектор e_4 равна нулю при $a = 0$. Положим $a = 0$. Подставляя в (3.5) коэффициенты метрики g_1 и значения структурных констант из (5.2), находим ненулевые компоненты связности:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^2_{12} = -\Gamma^3_{13} = \Gamma^2_{21} = -\Gamma^3_{31} = \alpha h,\\
&\Gamma^3_{12} = \gamma h,\\
&\Gamma^2_{13} = \beta h,\\
&\Gamma^3_{21} = \gamma h - 2,\\
&\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33} = 2\,b\alpha,\\
&\Gamma^1_{23} = b\,(\beta - \gamma) - 1,\\
&\Gamma^2_{31} = \beta h - 2,\\
&\Gamma^1_{32} = b\,(\beta - \gamma) + 1,
\end{aligned}$$

где $h = c - \beta - \gamma$. Подставляя найденные значения компонент связности и значения структурных констант в формулу (3.9), получаем:

$$k_1(e_1, e_4) = k_1(e_2, e_4) = k_1(e_3, e_4) = 0.$$

О других ассоциированных почти комплексных структурах и метриках см. [8].

Замечание 5.4. *Поскольку группа* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ *изоморфна группе* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*$ *(где* $\mathbb{R}^*$ *– мультипликативная группа ненулевых действительных чисел), алгебра Ли которой совпадает с алгеброй Ли группы* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$*, то все полученные в этом разделе результаты справедливы и для группы* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$*. В частности эта группа не допускает левоинвариантные симплектические структуры и левоинвариантные псевдокэлеровы метрики, но допускает биинвариантную локально конформно псевдокэлерову метрику.*

6 Группа $H_3 \times \mathbb{R}$

Пусть H_3 – трехмерная матричная группа Гейзенберга. Это нильпотентная некомпактная группа Ли, состоящая из вещественных матриц вида:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Алгебра Ли этой группы состоит из верхних нильтреугольных матриц, и канонический базис имеет вид:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обозначая через e_4 базисный вектор алгебры Ли $\mathbb{R}$, находим:

$$\begin{aligned} &[e_k, e_4] \quad \text{при } k = 1, 2, 3, \\ &[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0, \\ &[e_1, e_2] = e_3. \end{aligned}$$

Отсюда немедленно находим ненулевые структурные константы:

$$C^3_{12} = -C^3_{21} = 1.$$

Пусть $\theta^k, k = 1, 2, 3, 4$ – двойственный базис левоинвариантных 1-форм. Подставляя в (3.3) значения структурных констант, находим:

$$\begin{aligned} &d\theta^k = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, 4, \\ &d\theta^3 = -1/2\, \theta^1 \wedge \theta^2. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Лемма 6.1. *В выбранном базисе, любая левоинвариантная 2-форма является замкнутой тогда, и только тогда, когда она не содержит слагаемого пропорционального базисной 2-форме* $\theta^3 \wedge \theta^4$.

Для доказательства достаточно представить произвольную левоинвариантную 2-форму в виде линейной комбинации базисных 2-форм, и воспользоваться соотношениями (6.1).

Из этой леммы в частности следует, что группа $H_3 \times \mathbb{R}$ допускает левоинвариантные симплектические структуры.

Обозначим через x_4 евклидову координату на $\mathbb{R}$ и выберем естественную левоинвариантную риманову метрику

$$g_0(X, X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

и левоинвариантную псевдориманову метрику

$$g_1(X, X) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

положим:

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 6.2. *Среди g_0-ортогональных и g_1-ортогональных почти комплексных структур на группе $H_3 \times \mathbb{R}$, интегрируемыми являются только структуры вида:*

$$\begin{bmatrix} \pm I & 0 \\ 0 & \pm I \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Доказательство проведем только для структур, сохраняющих ориентацию на группе, поскольку для структур, меняющих ориентацию все вычисления полностью аналогичны. Пусть J – g_0-ортогональная почти комплексная структура , сохраняющая ориентацию. тогда по теореме 1.1

$$J = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & -b \\ -b & -c & 0 & a \\ -c & b & -a & 0 \end{bmatrix}, \tag{6.2}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Подставляя значения структурных констант и коэффициенты матрицы (6.2) в (3.2), находим ненулевые компоненты тензора Нейенхейса:

$$\begin{aligned}
&N_{12}^3 = N_{34}^3 = 2\,(a^2 - 1),\\
&N_{13}^1 = -N_{14}^2 = -N_{23}^2 = -N_{24}^1 = -2\,bc,\\
&N_{13}^2 = -N_{24}^2 = -2\,c^2,\\
&N_{13}^3 = -N_{24}^3 = 2\,ab,\\
&N_{14}^1 = N_{23}^1 = 2\,b^2,\\
&N_{14}^3 = N_{23}^3 = 2\,ac.
\end{aligned}$$

Если структура J – интегрируема, то из равенства нулю тензора Нейенхейса получаем:

$$b = c = 0,\ a = \pm 1.$$

Пусть теперь J – g_1-ортогональная почти комплексная структура, сохраняющая ориентацию. Снова по теореме 1.1 имеем:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & -b \\ b & c & 0 & a \\ c & -b & -a & 0 \end{bmatrix},$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = 1.$$

Компоненты тензора Нейенхейса этой структуры с точностью до знака совпадают с компонентами тензора Нейенхейса структуры вида (2.12). Поэтому повторяя приведенные выше вычисления снова получаем:

$$b = c = 0,\ a = \pm 1,$$

что окончательно доказывает утверждение теоремы. □

Определим правое действие группы $\mathbb{R}$ на группе H_3 как умножение справа на матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда вектор e_3 порождает левоинвариантное векторное поле касательное к орбите действия этой группы. Также как в разделе , 5 естественно возникает двумерное распределение $\{e_3, e_4\}$ и g_0-ортогональное ему распределение $\{e_1, e_2\}$. Более того, распределение $\{e_3, e_4\}$ является центром алгебры Ли $\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$. Теперь, как и ранее, естественным образом возникают приводимые и антиприводимые почти комплексные структуры ассоциированные с этими распределениями.

Докажем сначала общий результат.

Теорема 6.3. *Пусть J – приводимая почти комплексная структура на группе Ли размерности $4\,n$, ассоциированная с $2\,n$-мерными распределениями B и $B^{\perp}$. Тогда если структура J интегрируема на одном распределении, а второе распределение лежит в центре алгебры Ли группы G, то структура J – интегрируема.*

Доказательство. Для определенности будем считать что распределение B лежит в центре алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть N – тензор Нейенхейса приводимой почти комплексной структуры ассоциированной с распределениями B и $B^{\perp}$. Для любых X, Y из $\mathfrak{g}$ имеем:

$$X = U + V,\ Y = W + T,$$

где

$$U, W \in B^{\perp},\ V, T \in B.$$

Откуда:

$$N(X, Y) = N(U, W) + N(U, T) + N(V, W) + N(V, T).$$

Пользуясь определением тензора Нейенхейса, $N(X, Y) = 2\,([JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y])$, и тем, что структура J инвариантно действует на распределении B, лежащем в центре, получаем:

$$N(V, W) = N(V, T) = N(U, T) = 0.$$

Поскольку структура J интегрируема на $B^{\perp}$, то $N(U, W) = 0$. Таким образом $N \equiv 0$ и структура J – интегрируема. □

Следствие 6.4. *Любая приводимая почти комплексная структура на группе $H_3 \times \mathbb{R}$, ассоциированная с распределениями $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_3, e_4\}$ – интегрируема.*

Поскольку центр группы $H_3 \times \mathbb{R}$ равен $\{e_3, e_4\}$, то для доказательства достаточно убедиться, что значение тензора Нейенхейса на паре e_1, e_2 равно 0. Для этого нужно применить формулу (2.1) для структуры вида (2.2), с учетом равенства (1.12) и значений базисных скобок Ли.

Теорема 6.5. *Группа $H_3 \times \mathbb{R}$ не допускает антиприводимых комплексных структур ассоциированных с распределениями $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_3, e_4\}$.*

Доказательство. Пусть $\hat{J}$ – антиприводимая почти комплексная структура ассоциированная с распределениями $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_3, e_4\}$, и $\hat{N}$ – ее тензор Нейенхейса. Поскольку распределение $\{e_3, e_4\}$ является центром алгебры Ли группы $H_3 \times \mathbb{R}$, то в силу определения тензора Нейенхейса и равенства $[e_1, e_2] = e_3$, имеем:

$$\hat{N}(e_1, e_2) = 2\,\left([\hat{J}e_1, \hat{J}e_2] - \hat{J}[\hat{J}e_1, e_2] - \hat{J}[e_1, \hat{J}e_2] - [e_1, e_2]\right) = -2\,[e_1, e_2] = -2\,e_3.$$

Таким образом, $\hat{N} \neq 0$, а следовательно структура $\hat{J}$ не может быть интегрируемой. □

Поскольку приводимые комплексные структуры ассоциированные с распределениями $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_3, e_4\}$ сохраняют 2-форму

$$\Omega = \theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4,$$

то следуя разделу 2 можно получить семейство эрмитовых метрик с фундаментальной 2-формой Ω. Однако, в силу (6.1) имеем:

$$d\Omega = -1/2\, \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^4 = -1/2\, \theta^4 \wedge \left(\theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4\right) = -1/2\, \theta^4 \wedge \Omega.$$

т. е. по теореме 4.5, все такие метрики являются локально конформно кэлеровыми.

Рассмотрим левоинвариантные симплектические структуры:

$$\Omega' = \theta^1 \wedge \theta^3 + \theta^2 \wedge \theta^4$$

и

$$\Omega'' = \theta^1 \wedge \theta^4 + \theta^2 \wedge \theta^3$$

и пары распределений $\{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$ и $\{e_1, e_4\}$, $\{e_2, e_3\}$. Согласно разделу 1.3, приводимые почти комплексные структуры, ассоциированные с этими парами распределений, сохраняют симплектические структуры Ω' и Ω'' соответственно.

Лемма 6.6. *Среди приводимых почти комплексных структур, ассоциированных с парами распределений $\{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$ и $\{e_1, e_4\}$, $\{e_2, e_3\}$, на группе $H_3 \times \mathbb{R}$, нет интегрируемых.*

Доказательство. Если J – приводимая почти комплексная структура, ассоциированная с распределениями $\{e_1, e_3\}$ и $\{e_2, e_4\}$, то в силу раздела 1.3, J имеет вид (2.3), и выполняются условия (2.6). Подставляя коэффициенты матрицы (2.2) и значения структурных констант в формулу (3.2), находим:

$$N_{23}^1 = 2\, b_1^2.$$

Если структура J – интегрируема, то $b_1 = 0$, что противоречит условиям (2.6).

Пусть теперь J – приводимая почти комплексная структура, ассоциированная с распределениями $\{e_1, e_4\}$ и $\{e_2, e_3\}$, тогда как показано в разделе 2, J имеет вид (2.4) и выполняются условия (2.5). снова с помощью формулы (3.2) находим:

$$N_{13}^2 = -2\, \beta^2.$$

Если структура J – интегрируема, то $\beta = 0$, что противоречит условиям (2.5). □

Таким образом, приведенные выше частные случаи не дают левоинвариантных кэлеровых метрик. Тем не менее, поскольку группа $H_3 \times \mathbb{R}$ допускает глобальные комплексные координаты (z_1, z_2), то легко предъявить не инвариантную кэлерову метрику g, положив например $g = dz_1 d\bar{z}_1 + dz_2 d\bar{z}_2$.

Пусть J – приводимая комплексная структура ассоциированная с распределениями $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_3, e_4\}$. Такая структура сохраняет 2-форму Ω, рассмотренную выше. Введем эрмитову метрику g_2, положив:

$$g_2(X, X) = \Omega(JX, X).$$

Имеем:

$$g_2 = -c\, (\theta^1)^2 + 2\, a\theta^1\theta^2 + b\, (\theta^2)^2 - \gamma\, (\theta^3)^2 + 2\, \alpha\theta^3\theta^4 + \beta\, (\theta^4)^2,$$

$$a^2 + bc = \alpha^2 + \beta\gamma = -1.$$

Эта метрика зависит от четырех вещественных параметров. Поскольку фундаментальная 2-форма этой метрики совпадает с Ω, то мы получаем четырехпараметрическое семейство локально конформно кэлеровых метрик.

Подставляя в формулу (3.5) значения структурных констант, находим ненулевые компоненты связности метрики g_2:

$$
\begin{array}{l}
\Gamma^3_{12} = -\Gamma^3_{21} = 1/2, \\
\Gamma^1_{13} = -\Gamma^2_{23} = \Gamma^1_{31} = -\Gamma^2_{32} = -1/2\, a\gamma, \\
\Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = -1/2\, c\gamma, \\
\Gamma^1_{14} = -\Gamma^2_{24} = \Gamma^1_{41} = -\Gamma^2_{42} = 1/2\, a\alpha, \\
\Gamma^2_{14} = \Gamma^2_{41} = 1/2 c\alpha, \\
\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = -1/2\, b\gamma, \\
\Gamma^1_{24} = \Gamma^1_{42} = 1/2\, b\alpha.
\end{array}
$$

Теперь, подставляя найденные компоненты связности в (3.7), находим тензор Риччи:

$$S_2 = -\frac{c\gamma}{2}\,(\theta^1)^2 + a\gamma\,\theta^1\theta^2 + \frac{b\gamma}{2}\,(\theta^2)^2 + \frac{\gamma^2}{2}\,(\theta^3)^2 - \alpha\gamma\,\theta^3\theta^4 + \frac{\alpha^2}{2}\,(\theta^4)^2.$$

Как видно, при $\alpha = 0$ тензор Риччи вырождается в направлении e_4. Отсутствие на группе $H_3 \times \mathbb{R}$ левоинвариантных не Риччи-плоских эйнштейновых метрик доказывается так же как в разделе 4.

Вычисляя по формуле (3.8) скалярную кривизну метрики g_2, получаем:

$$\sigma_2 = \gamma/2 < 0.$$

В [7] показано, что тензор Риччи метрики g является эрмитовым только тогда, когда метрика g соответствует критической точке скалярной кривизны семейства всех ассоциированных метрик. Поскольку функция σ_2 не имеет критических точек на рассматриваемом семействе метрик, то тензор Риччи метрики g_2 не является эрмитовым при всех допустимых значениях параметров.

Найдем секционные кривизны метрики g_2 в базисных направлениях, пользуясь формулой (3.9). Получаем:

$$
\begin{array}{l}
k_2(e_1, e_2) = 3/4\,\gamma, \\
k_2(e_1, e_3) = k_2(e_2, e_3) = -1/4\,\gamma, \\
k_2(e_1, e_4) = k_2(e_2, e_4) = \frac{\alpha^2}{4\,\beta}, \\
k_2(e_3, e_4) = 0.
\end{array}
$$

Поскольку $\gamma < 0$, то при любых допустимых значениях параметров, метрика g_2 имеет знаконеопределенную секционную кривизну.

Покажем, что при всех допустимых значениях параметров метрика g_2, не является биинвариантной. Действительно, если бы метрика g_2 была биинвариантной, то:

$$k_2(e_1, e_2) = 1/4\, g_2([e_1, e_2], [e_1, e_2]) = 1/4\, g_2(e_3, e_3) = -1/4\,\gamma = 3/4\,\gamma,$$

что не выполняется при $\gamma < 0$.

Таким образом получен следующий результат:

Теорема 6.7. *Группа $H_3 \times \mathbb{R}$ допускает четырехпараметрическое семейство комплексных структур, и левоинвариантных локально конформно кэлеровых метрик с отрицательной скалярной кривизной.*

7 Группа $E(1) \times \mathbb{R}^2$.

Пусть $E(1)$ – группа аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}$. Эта группа состоит из функций вида:

$$y = ax + b.$$

Пользуясь матричной реализацией этой группы легко получить базис e_1, e_2, такой что:

$$[e_1, e_2] = e_2.$$

Достаточно положить $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Введем метрику g_0 на группе $E(1) \times \mathbb{R}^2$, положив:

$$g_0(X, X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \tag{7.1}$$

где $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$, и e_3, e_4 – стандартный базис в $\mathbb{R}^2$. Заметим что векторы e_3 и e_4 порождают центр алгебры Ли группы $E(1) \times \mathbb{R}^2$.

Из всего выше сказанного следует, что ненулевые структурные константы имеют вид:

$$C_{12}^2 = -C_{21}^2 = 1.$$

Так же как и в предыдущих разделах положим:

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 7.1. *Норма тензора Нейенхейса любой g_0-ортогональной почти комплексной структуры на группе $E(1) \times \mathbb{R}^2$ не превосходит 4. Среди ортогональных относительно метрики g_0 почти комплексных структур интегрируемыми являются только структуры вида:*

$$\begin{bmatrix} \pm I & 0 \\ 0 & \pm I \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Пусть J – матрица ортогональной относительно метрики (7.1) почти комплексной структуры в каноническом базисе. Для определенности будем считать,что J сохраняет ориентацию. По теореме 1.1 имеем:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & -b \\ -b & -c & 0 & a \\ -c & b & -a & 0 \end{bmatrix}, a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Подставляя коэффициенты этой матрицы и значения структурных констант в формулу (3.2), находим ненулевые компоненты тензора Нейенхейса N:

$$\begin{aligned}
&N_{12}^2 = N_{34}^2 = 2\,(a^2 - 1), \\
&N_{13}^1 = -N_{14}^2 = -N_{23}^2 = -N_{24}^1 = -2\,ac, \\
&N_{13}^2 = N_{14}^1 = N_{23}^1 = -N_{24}^2 = 2\,ab, \\
&N_{13}^3 = -N_{24}^3 = 2\,c^2, \\
&N_{14}^3 = N_{23}^3 = -2\,bc.
\end{aligned}$$

Откуда:
$$\|N\|^2 = 8\,\left((a^2-1)^2 + c^2\,(b^2+c^2) + 2\,a^2\,(b^2+c^2)\right) = 8\,(1-a^2)(2-b^2).$$

Поскольку $b^2 \leqslant 1$, то $\|N\| = 0$ только при $a = \pm 1$. Таким образом, структура J интегрируема только при $a = \pm 1, b = c = 0$.

Легко заметить, что $\|N\|^2$ достигает своего наибольшего значения 16 при $a = b = 0$, откуда $\|N\| \leqslant 4$. Подставляя значения $a = b = 0, c = \pm 1$ в матрицу J, находим, что сохраняющие ориентацию g_0-ортогональные структуры с максимальной нормой тензора Нейенхейса, имеют вид:
$$\pm \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{id}_2 \\ \operatorname{id}_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проведение аналогичных рассуждений для ортогональных структур меняющих ориентацию, окончательно доказывает теорему. □

Обозначим через $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4$ базис левоинвариантных 1-форм, двойственный каноническому базису алгебры Ли группы $E(1) \times \mathbb{R}^2$. Подставляя в (3.3) значения структурных констант, находим:
$$\begin{aligned} &d\theta^k = 0 \quad \text{при } k = 1,3,4, \\ &d\theta^2 = -1/2\,\theta^1 \wedge \theta^2. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Из равенств (7.2) в частности следует, что левоинвариантная 2-форма является замкнутой только тогда, когда она не содержит слагаемых пропорциональных базисным формам $\theta^2 \wedge \theta^3$ и $\theta^2 \wedge \theta^4$. Таким образом получен следующий результат:

Лемма 7.2. *Левоинвариантная 2-форма Θ на группе $E(1) \times \mathbb{R}^2$ является симплектической тогда, и только тогда, когда*
$$\Theta = \alpha_1 \theta^1 \wedge \theta^2 + \alpha_2 \theta^1 \wedge \theta^3 + \alpha_3 \theta^1 \wedge \theta^4 + \alpha_4 \theta^3 \wedge \theta^4,$$
и $\alpha_1 \neq 0, \alpha_4 \neq 0$.

Поскольку алгебра Ли $\mathfrak{e}(1) \times \mathbb{R}^2$ является прямым произведением двумерных подалгебр $\mathfrak{e}(1)$ и $\mathbb{R}^2$, то эти подалгебры можно считать двумерными левоинвариантными распределениями. Так как любая почти комплексная структура на алгебре Ли $\mathfrak{e}(1)$ – интегрируема (эта алгебра Ли – двумерна), и $\mathbb{R}^2$ является центром алгебры $\mathfrak{e}(1) \times \mathbb{R}^2$, то по теореме 6.3, любая приводимая почти комплексная структура ассоциированная с распределениями $\mathfrak{e}(1)$ и $\mathbb{R}^2$ – интегрируема. Таким образом на группе $E(1) \times \mathbb{R}^2$ возникает четырехпараметрическое семейство комплексных структур вида:
$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & -\alpha \end{bmatrix}, \tag{7.3}$$
$$a^2 + bc = \alpha^2 + \beta\gamma = -1.$$

Замечание 7.3. *Из доказательства теоремы 7.1 видно, что g_0-ортогональные почти комплексные структуры с максимальной нормой тензора Нейенхейса являются антиприводимыми. Композиция двух таких структур дает оператор, инвариантно действующий на каждом распределении.*

Теорема 7.4. *Группа $E(1)\times\mathbb{R}^2$ не допускает антиприводимых комплексных структур ассоциированных с подалгебрами $\mathfrak{e}(1)$ и $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство проводится так же как доказательство теоремы 6.5.

Как показано в разделе 2, любая структура вида (7.3) сохраняет 2-форму:

$$\Omega_1 = \theta^1\wedge\theta^2 + \theta^3\wedge\theta^4.$$

Из равенств (7.2) следует, что $d\Omega_1 = 0$. Теперь из формы Ω_1 с помощью комплексной структуры J вида (2.15), получаем риманову метрику g_1 с фундаментальной формой Ω_1:

$$g_1(X,X) = \Omega_1(JX,X) = -cx_1^2 + 2\,ax_1x_2 + bx_2^2 - \gamma\, x_3^2 + 2\,\alpha\, x_3x_4 + \beta\, x_4^2.$$

Поскольку форма Ω_1 – замкнута, то метрика g_1 является кэлеровой при любых значениях параметров.

Таким образом, на группе $E(1)\times\mathbb{R}^2$ возникает четырехпараметрическое семейство левоинвариантных кэлеровых метрик.

Найдем компоненты связности метрики g_1. Подставляя в (3.5) коэффициенты метрики и значения структурных констант, находим:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11} = -\Gamma^2_{12} = a^2,\\
&\Gamma^2_{11} = ac,\\
&\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\Gamma^2_{22} = ab,\\
&\Gamma^2_{21} = bc,\\
&\Gamma^1_{22} = b^2.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения компонент связности в (3.7), находим вид тензора Риччи:

$$S_1 = bc\,(\theta^1)^2 - 2\,ab\theta^1\theta^2 - b^2\,(\theta^2)^2.$$

Как видно тензор Риччи вырождается в направлении $\mathbb{R}^2$. Поскольку группу $E(1)\times\mathbb{R}^2$ можно представить в виде $E(1)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, то так же как в разделе 4 можно показать, что эта группа не допускает левоинвариантных не Риччи-плоских эйнштейновых метрик. Теперь, пользуясь формулой (3.8), находим скалярную кривизну метрики g_1:

$$\sigma_1 = -2\,b < 0.$$

Как видно, скалярная кривизна не имеет критических точек, следовательно тензор Риччи метрики g_1 не является эрмитовым, при всех допустимых значениях параметров.

Подставляя в (3.9) коэффициенты метрики g_1 и значения структурных констант, получаем что все базисные секционные кривизны, за исключением $\{e_1,e_2\}$, равны нулю, и $k_1(e_1,e_2) = -b$. Поскольку секционная кривизна не зависит от выбора базиса и $b>0$, то для всех X и Y из $\mathfrak{e}(1)\times\mathbb{R}^2, k_1(X,Y)\leqslant 0$.

Обобщая полученные результаты, получаем следующую теорему:

Теорема 7.5. *Группа $E(1)\times\mathbb{R}^2$ допускает четырехпараметрическое семейство комплексных структур и левоинвариантных кэлеровых метрик, с отрицательной скалярной кривизной, и секционной кривизной $\leqslant 0$. А так же допускает четырехпараметрическое семейство левоинвариантных симплектических структур.*

8 Группа $E(1) \times E(1)$.

Рассмотрим группу $E(1) \times E(1)$. Как уже говорилось в разделе 7, алгебра Ли этой группы допускает базис e_1, e_2, e_3, e_4, такой что:

$$[e_1, e_2] = e_2, \ [e_3, e_4] = e_4 \tag{8.1}$$

а все остальные базисные скобки равны нулю. Из этих равенств сразу находим ненулевые структурные константы:

$$\begin{gathered} C_{12}^2 = -C_{21}^2 = 1, \\ C_{34}^4 = -C_{43}^4 = 1. \end{gathered}$$

Введем каноническую риманову левоинвариантную метрику g_0, имеющую в выбранном базисе вид:

$$g_0(X, X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Вводя матрицу I как в предыдущих разделах, получаем:

Теорема 8.1. *Норма тензора Нейенхейса любой g_0-ортогональной почти комплексной структуры на группе $E(1) \times E(1)$ не превосходит $2\sqrt{5}$. Среди g_0-ортогональных почти комплексных структур на группе $E(1) \times E(1)$, интегрируемыми являются только структуры вида:*

$$\begin{bmatrix} \pm I & 0 \\ 0 & \pm I \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Пусть J – ортогональная относительно метрики g_0 почти комплексная структура, сохраняющая ориентацию на группе. По теореме 1.5, в выбранном базисе матрица этой структуры имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & c & -b \\ b & c & 0 & a \\ c & -b & -a & 0 \end{bmatrix},$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Подставляя коэффициенты этой матрицы и значения структурных констант в (3.2), находим ненулевые компоненты тензора Нейенхейса:

$$\begin{aligned} &N_{12}^2 = -N_{34}^2 = -N_{34}^4 = 2\,(a^2 - 1), \\ &N_{13}^1 = -N_{23}^2 = -2\,ac, \\ &N_{13}^2 = N_{23}^1 = 2\,ab, \\ &N_{13}^3 = -N_{24}^3 = 2\,c^2, \\ &N_{14}^1 = -N_{24}^2 = 2\,b\,(a + c), \\ &N_{14}^2 = 2\,(ac - b^2), \\ &N_{14}^3 = N_{23}^3 = -2\,bc, \\ &N_{24}^1 = 2\,(ac + c^2), \end{aligned}$$

Откуда:

$$\|N\|^2 = 12\,\left(a^2 - 1\right)^2 + 8\,a^2\left(a^2 - 1\right) + 8\,b^2\,(a + c)^2 + 4\,\left(ac - b^2\right)^2 + 4\,\left(ac + c^2\right)^2 =$$

$$= 8\,b^2ac + 8\,ac^3 + 16\,b^4 + 32\,b^2c^2 + 16\,c^4 = 8\,\left(1 - a^2\right)\left(ac - 2\,a^2 + 2\right).$$

Как видно $\|N\|^2 = 0$ либо при $a = \pm 1$, либо при $a = 1/4\,\left(c \pm \sqrt{c^2+16}\right)$. Предположим что $a = 1/4\,\left(c \pm \sqrt{c^2+16}\right)$, тогда из условия $\|N\|^2 = 0$ следует что $N^3_{13} = 2\,c^2 = 0$. Откуда:

$$c = 0, a = \pm 1.$$

Таким образом, $\|N\| = 0$ только при $a = \pm 1, b = c = 0$.

Оценим значение функции $\|N\|^2$ в круге $a^2 + c^2 \leqslant 1$. Из общего неравенства $ac \leqslant 1/2\,(a^2+c^2)$ следует что $ac \leqslant 1/2$. Получаем:

$$8\,(1-a^2)(ac - 2\,A^2 + 2) \leqslant 8\,(5/2 - 2\,a^2).$$

Так как $a^2 \leqslant 1$, то последняя функция принимает наибольшее значение равное 20, при $a = 0$. Таким образом, $\|N\|^2 \leqslant 20$, откуда $\|N\| \leqslant 2\sqrt{5}$.

Проводя подобные рассуждения для g_0-ортогональных почти комплексных структур, изменяющих ориентацию, получаем аналогичные результаты, и окончательно доказываем теорему. □

Пусть $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4$ – базис левоинвариантных 1-форм, двойственный выбранному базису алгебры Ли $\mathfrak{e}(1) \times \mathfrak{e}(1)$. Подставляя значения структурных констант в (3.3), находим:

$$\begin{aligned} &d\theta^1 = d\theta^3 = 0,\\ &d\theta^2 = -1/2\,\theta^1 \wedge \theta^2,\\ &d\theta^4 = -1/2\,\theta^3 \wedge \theta^4. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Из этих равенств в частности следует, что левоинвариантная 2-форма является замкнутой только тогда, когда она не содержит слагаемых пропорциональных базисным 2-формам: $\theta^1 \wedge \theta^4, \theta^2 \wedge \theta^3, \theta^2 \wedge \theta^4$. Откуда вытекает следующий факт:

Лемма 8.2. *Левоинвариантная 2-форма Θ на группе $E(1) \times E(1)$ является симплектической тогда, и только тогда, когда она имеет вид:*

$$\Theta = \alpha_1\theta^1 \wedge \theta^2 + \alpha_2\theta^1 \wedge \theta^3 + \alpha_3\theta^3 \wedge \theta^4,$$

и $\alpha_1 \neq 0, \alpha_3 \neq 0$.

Поскольку алгебра Ли $\mathfrak{e}(1) \times \mathfrak{e}(1)$ является прямым произведением двумерных подалгебр, то так же как в разделе 7, естественным образом возникают приводимые почти комплексные структуры, инвариантно действующие на каждой подалгебре $\mathfrak{e}(1)$. Так как любую такую структуру можно рассматривать как совокупность двух почти комплексных структур, и любая почти комплексная структура на двумерной алгебре Ли интегрируема, то все такие структуры являются интегрируемыми.

Теорема 8.3. *Группа $E(1) \times E(1)$ не допускает антиприводимых комплексных структур ассоциированных с подалгебрами $\mathfrak{e}(1)$.*

Для доказательства достаточно, с помощью (3.2), вычислить компоненту N^2_{12} тензора Нейенхейса N для почти комплексной структуры вида (4.5), которая оказывается равной -2.

По теореме 2.3 приводимые комплексные структуры, ассоциированные с подалгебрами $\mathfrak{e}(1)$, образуют четырехпараметрическое семейство. Как показано в разделе 2 это семейство порождает четырехпараметрическое семейство эрмитовых метрик:

$$g_1 = -c\,(\theta^1)^2 + 2\,\theta^1\theta^2 + b\,(\theta^2)^2 - \gamma\,(\theta^3)^2 + 2\,\alpha\theta^3\theta^4 + \beta\,(\theta^4)^2,$$

$$a^2 + bc = \alpha^2 + \beta\gamma = -1.$$

С фундаментальной 2-формой этой метрики имеет вид:

$$\Omega_1 = \theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4.$$

Из равенств (8.2) следует что $d\Omega_1 = 0$, т. е. метрика g_1 является кэлеровой при всех допустимых значениях параметров.

Из равенств (8.1) вытекает тот факт, что первый производный идеал алгебры Ли $\mathfrak{e}(1) \times \mathfrak{e}(1)$ равен $\{e_2, e_4\}$. причем этот идеал является коммутативным, и его g_0-ортогональное дополнение равно $\{e_1, e_3\}$. Таким образом, мы получили еще одну пару двумерных распределений. По теореме 2.3 приводимые почти комплексные структуры, ассоциированные с этими распределениями, имеют вид:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ c_1 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & -a_2 \end{bmatrix}, \tag{8.3}$$

$$a_1^2 + b_1c_1 = a_2^2 + b_2c_2 = -1. \tag{8.4}$$

А по теореме 2.6, антиприводимые почти комплексные структуры, ассоциированные с этими же распределениями, имеют вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & -d/D & 0 & b/D \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & c/D & 0 & -a/D \\ c & 0 & d & 0 \end{bmatrix}, \tag{8.5}$$

$$D = ad - bc.$$

Лемма 8.4. *Среди приводимых почти комплексных структур вида (8.3) нет интегрируемых. А среди антиприводимых почти комплексных структур вида (8.5) интегрируемыми являются только структуры вида:*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c/ad & 0 & -1/d \\ c & 0 & d & 0 \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Пусть J интегрируемая структура вида (8.3), тогда ее тензор Нейенхейса N равен нулю. Подставляя коэффициенты матрицы (8.3) и значения структурных констант в (3.2), получаем что $N_{12}^2 = 2\,b_1c_1 = 0$. Но из условия (8.4) следует что $b_1c_2 \neq 0$, следовательно N не может быть равным нулю.

Пусть теперь $\hat{N}$ – тензор Нейенхейса почти комплексной структуры вида (8.5). Подставляя коэффициенты этой структуры и значения структурных констант в (3.2), находим ненулевые компоненты тензора $\hat{N}$:

$$\begin{aligned}
&\hat{N}^2_{12} = -\hat{N}^3_{13} = 2\,bc/D,\\
&\hat{N}^1_{13} = -\hat{N}^2_{23} = 2\,bd/D,\\
&\hat{N}^2_{14} = -2\,ab/D,\\
&\hat{N}^1_{24} = -2\,bd/D^2,\\
&\hat{N}^3_{24} = 2\,bc/D^2,\\
&\hat{N}^2_{34} = -2\,b^2/D.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что $N = 0$ при $b = 0, D = ad$. Подставляя эти значения в матрицу (8.5), получаем вид антиприводимых комплексных структур. □

Как показано в разделе 2, с каждой почти комплексной структурой вида (8.3) можно, посредством фундаментальной 2-формы

$$\Omega_2 = \theta^1 \wedge \theta^3 + \theta^2 \wedge \theta^4,$$

связать риманову метрику:

$$g_2 = -c_1\,(\theta^1)^2 + 2\,a_1\theta^1\theta^3 - c_2\,(\theta^2)^2 + b_1\,(\theta^3)^2 + 2\,a_2\theta^2\theta^4 + b_2\,(\theta^4)^2,$$

$$a_1^2 + b_1c_1 = a_2^2 + b_2c_2 = -1.$$

Лемма 8.5. *Метрика g_2 не является локально конформно кэлеровой при любых допустимых значениях параметров, однако существует левоинвариантная замкнутая 1-форма ω, такая что:*

$$d\Omega_2 = \omega \wedge \Omega_2.$$

Доказательство. Используя равенства (8.2), находим:

$$d\Omega_2 = -1/2\,\left(\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^4 - \theta^2 \wedge \theta^3 \wedge \theta^4\right) = -1/2\,\left(\theta^1 + \theta^3\right)\wedge\left(\theta^1 \wedge \theta^3 + \theta^2 \wedge \theta^4\right) = -1/2\,\left(\theta^1 + \theta^3\right)\wedge\Omega_2.$$

Поскольку формы θ^1 и θ^3 – замкнуты, то остается положить $\omega = -1/2\,(\theta^1 + \theta^3)$. Метрика g_2 не является локально конформно кэлеровой, так как нет комплексных структур, сохраняющих эту метрику. □

Подставляя в (3.5) значения структурных констант, находим ненулевые компоненты связности метрики g_1:

$$\begin{aligned}
&\gamma^1_{21} = -\gamma^2_{22} = ab,\\
&\gamma^2_{21} = bc,\\
&\gamma^1_{22} = -b^2,\\
&\gamma^3_{33} = -\gamma^4_{34} = \alpha^2,\\
&\gamma^4_{33} = \alpha\gamma,\\
&\gamma^3_{34} = \gamma^3_{43} = -\gamma^4_{44} = \alpha\beta,\\
&\gamma^4_{43} = \beta\gamma,\\
&\gamma^3_{44} = \beta^2.
\end{aligned}$$

Теперь подставляя найденные значения в (3.7), находим вид тензора Риччи:

$$S_1 = bc\,(\theta^1)^2 - 2\,ab\theta^1\theta^2 - b^2\,(\theta^2)^2 + \beta\gamma\,(\theta^3)^2 - 2\,\alpha\beta\,\theta^3\theta^4 - \beta^2\,(\theta^4)^2.$$

Как видно при $\beta = b, S_1 = -bg_1$, т. е. метрика g_1 при $\beta = b$ является эйнштейновой, и мы получаем трехпараметрическое семейство левоинвариантных эйнштейновых метрик.

С помощью формулы (3.8), находим скалярную кривизну метрики g_1:

$$\sigma_1 = -2\,(b + \beta) < 0.$$

Очевидно что функция σ_1 не имеет критических точек, а значит тензор Риччи метрики g_1 не является эрмитовым при всех допустимых значениях параметров.

Теперь найдем базисные секционные кривизны метрики g_1, пользуясь формулой (3.9). Получаем что все секционные базисные кривизны, за исключением $k_1(e_1, e_2)$ и $k_1(e_3, e_4)$, равны нулю, и $k_1(e_1, e_2) = -b, k_1(e_3 e_4) = -\beta$. Из определения секционной кривизны и неравенства Коши-Буняковского следует, что знак секционной кривизны $k_1(X, Y)$ совпадает со знаком функции $-2\,b\,(x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2) - 2\,\beta\,(x_3^2 y_4^2 + x_4^2 y_3^2)$. А поскольку $b > 0, \beta > 0$, то для любых векторов X и Y имеем $k_1(X, Y) \leqslant 0$.

Из всех полученных выше фактов вытекает следующая итоговая теорема:

Теорема 8.6. *Группа $E(1) \times E(1)$ допускает следующие структуры:*

(1) *Четырехпараметрическое семейство комплексных структур и четырехпараметрическое семейство левоинвариантных кэлеровых метрик с отрицательной скалярной кривизной и секционной кривизной* $\leqslant 0$.

(2) *Трехпараметрическое семейство левоинвариантных эйнштейновых метрик с отрицательной скалярной кривизной.*

(3) *Трехпараметрическое семейство левоинвариантных симплектических структур.*

Список литературы

[1] N. Bourbaki. Groupes et algèbres de Lie. Fasc. XXVI, XXXVII. Chap. I-III (Paris: Hermann, 1971, 1972).

[2] Chu B.-Y. Symplectic Homogeneous Spaces// Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 197, 1974, P. 145-159.

[3] Ishihara S. Homogeneous Riemannian spaces of four dimensions // J. Math. Soc. Japan. Vol. 7, no. 4, 1955, P. 345-369.

[4] Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Advances in Math. Vol. 21, 1976, P. 293-329.

[5] Dragomir S., Ornea L. Locally Conformal Kahler Geometry. // Progress in Math., Birkhauser, Basel, vol. 155, 1998.

[6] Barberis M.l. Hypercomplex structures on four-dimensional Lie groups. // Proc. Amer. Math. Soc. V. 125, No 4, 1997, p. 1043-1054.

[7] Смоленцев Н.К. Пространства римановых метрик // Современная математика и ее приложения, т. 31, 2003, С. 69-146.

[8] Смоленцев Н.К. Ассоциированные почти комплексные структуры и (псевдо) римановы метрики на группах $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ и $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. // Вестник Кемеровского государственного университета № 4 (24), с. 155-162.

[9] Корнев Е.С. Приводимые почти комплексные структуры на односвязных группах Ли размерности 4. // Вестник Кемеровского государственного университета, серия "Математика № 1 (25), Кемерово, 2006, с. 39-42.

[10] П. Годушон. Поверхности Хопфа – Квазикомплексные многообразия размерности 4. // доклад VII, в кн. "Четырехмерная риманова геометрия: семинар Артура Бессе 1978/79 г. Москва, Мир, 1985, с. 120-138.

[11] Л. Берар-Бержери. Однородные римановы пространства размерности 4. // доклад III, в кн. в кн. "Четырехмерная риманова геометрия: семинар Артура Бессе 1978/79 г. Москва, Мир, 1985, с. 45-59.

[12] Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли. // Известия высших учебных заведений, Математика, 1963, № 1 (32), с. 114-123.

[13] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. В 2 т. // Москва: Эдиториал УРСС, 1998.

[14] Ш. Кобаяси, К. Намидзу. Основы дифференциальной геометрии. В 2 т. // Москва: Наука, 1981.

[15] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. // Москва: Мир, 1964.