**УДК 514.763**

**Аффинорные метрические структуры и их физические приложения**

**Affinor metric structures and their applications for Physics**

Корнев Е.С.

Kornev E. S.

Кемеровский государственный университет, 650043, Россия, Кемерово, Красная, 6.

E-mail: q148@mail.ru

**Аннотация.** В работе описаны основы математической теории аффинорных метрических структур и физические задачи, в которых применяются такие структуры. Под аффинорной метрической структурой понимается произвольная 1-форма, имеющая радикал произвольного ранга, некоторая риманова метрика и особое поле эндоморфизмов касательных пространств, связывающее внешний дифференциал этой 1-формы и метрику. Аффинорные метрические структуры являются обобщением почти контактных метрических структур и кэлеровых структур с точной фундаментальной 2-формой. В конце работы приводится описание приложений аффинорных метрических структур в физике. Целью работы является демонстрация возможностей применения теории аффинорных метрических структур при решении математических и физических задач. В частности, использование таких структур для поиска замкнутых кривых с ненулевой циркуляцией векторного поля и построение подмногообразий, на которых внешний дифференциал 1-формы, индуцированной векторным полем, невырожден. В работе используются методы римановой геометрии, теории дифференциальных форм и математического анализа на многообразиях. Актуальность тематики работы обусловлена самым общим случаем постановки задачи для любой 1-формы с произвольным радикалом. В то время как в классическом случае в физике и геометрии рассматриваются только 1-формы с нулевым радикалом.

**Ключевые слова:** аффинорная метрическая структура, радикал 1-формы, действие векторного поля на кривой.

**§1. Введение**

Понятие аффинорной метрической структуры возникает как естественное обобщение почти контактных и кэлеровых структур. Однако, в данной работе рассматривается только та часть математической теории аффинорных метрических структур, которая необходима для решения следующей задачи: пусть  - односвязное многообразие размерности не меньше 3,  - замкнутая кривая в  и  - векторное поле на многообразии . Обозначим через  векторное поле бесконечно малого смещения, а через  обозначим 1-форму , где  обозначает скалярное произведение векторных полей на . Если многообразие  имеет размерность , в локальных координатах имеем:

 

Рассмотрим криволинейный интеграл:

 

Зададимся вопросом, когда интеграл (1) отличен от нуля для заданного векторного поля .

В силу односвязности многообразия  кривая  всегда является границей некоторой двумерной поверхности . По формуле Стокса имеем:

 

Здесь  есть внешний дифференциал 1-формы . Как правило, в физике вычисляют этот поверхностный интеграл, используя параметризацию поверхности . Однако при таком подходе ответить на вопрос о равенстве нулю интеграла (1) невозможно для любой незамкнутой 1-формы . Во-первых, поверхностный интеграл не всегда можно вычислить аналитическим способом, используя параметризацию поверхности. Во-вторых, если при численном вычислении интеграл оказывается сколь угодно близким к нулю, из этого не следует, что он в точности равен нулю. Теория аффинорных метрических структур позволяет решить эту задачу, изучая расположение исходной кривой на многообразии относительно двух распределений касательных подпространств, порождаемых самой 1-формой , выбранной на  римановой метрикой (скалярным произведением) и некоторым полем эндоморфизмов касательных пространств, называемым аффинором. Такой набор объектов мы и будем называть аффинорной метрической структурой. Аффинорная метрическая структура является обобщением почти контактных структур и почти кэлеровых структур с точной фундаментальной 2-формой. Основным достоинством аффинорной метрической структуры является то, что 1-форма  рассматривается в абсолютно общем виде. Не требуется, чтобы  была невырожденной 2-формой, и не накладывается никаких требований на четность размерности многообразия . В случае, когда размерность многообразия  является нечетной, аффинорная метрическая структура есть в точности почти контактная метрическая структура. К настоящему времени уже получена классификация инвариантных аффинорных метрических структур для однородных пространств размерности 3 и 4 (см. [1, 4]). Также, в [4] получены важные результаты для сфер произвольной размерности. Более того, в [3] построена и изучена математическая теория аффинорных метрических структур на векторных расслоениях, допускающих понятие внешнего дифференциала 1-формы, а в [2] изучены левоинвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли.

В первых двух разделах данной работы мы изучим необходимые свойства радикала 1-форм и аффинорных метрических структур. В разделе 4 будут описаны и изучены сублагранжевы подмногообразия, которые также необходимы для решения заявленной задачи. Наконец, в разделе 5 мы дадим окончательный ответ на поставленный здесь вопрос и опишем физические приложения рассмотренной задачи.

**§2. Радикал 1-форм**

Пусть  - вещественное многообразие размерности не меньше 3 и  - глобальная 1-форма на . Будем обозначать внутреннее произведение векторного поля  и тензорного поля  ковариантного типа через .

**Определение 2.1.** *Радикалом 1-формы*  *в точке*  *называется векторное подпространство* *. 1-форма*  *называется регулярной, если касательные подпространства*  *имеют одинаковую размерность во всех точках из* *.*

Из определения непосредственно вытекают следующие факты:

1. Радикал регулярной 1-формы является распределением касательных подпространств на ;
2. 1-форма является замкнутой тогда и только тогда, когда ее радикал совпадает со всем касательным расслоением ;
3. Внешний дифференциал 1-формы  является симплектической 2-формой на  тогда и только тогда, когда .

Будем обозначать распределение радикалов регулярной 1-формы  на  через  и называть рангом радикала ранг этого распределения. Ключевым результатом для ранга радикала регулярных 1-форм является следующая теорема, доказательство которой можно найти в [2]:

**Теорема 2.2.** *Пусть*  *- регулярная незамкнутая 1-форма на вещественном многообразии размерности*  *и*  *- ранг распределения* *. Тогда:*

1. *Если*  *четно, то и*  *четно, и* *.*
2. *Если*  *нечетно, то и*  *нечетно и* *.*

**Замечание 2.3.** Отметим, что 1-форма с радикалом ранга 0 на четномерном многообразии  задает на  симплектическую структуру , а 1-форма с радикалом ранга 1 на нечетномерном многообразии есть контактная структура на .

Пусть  - ортогональное дополнение к распределению  относительно некоторой римановой метрики на . Распределение  называется рабочим расслоением, и . Поскольку ранг рабочего расслоения есть коразмерность радикала и разность любых двух чисел одинаковой четности всегда есть четное число, из теоремы 2.2 получаем:

**Следствие 2.4.** *Рабочее расслоение*  *имеет четный ранг на многообразии размерности любой четности.*

**Пример 1.** Рассмотрим евклидово пространство  с координатами . Зададим 1-форму . Внешний дифференциал этой 1-формы имеет вид:

 

Эта 1-форма является регулярной. Ее радикал состоит из векторов с координатами  и имеет ранг , а рабочее расслоение состоит из векторов с координатами .

**Пример 2.** Рассмотрим евклидово пространство  с координатами . Зададим 1-форму . Внешний дифференциал этой 1-формы имеет вид:

 

При   и . При  радикал 1-формы  имеет ранг 2 и состоит из векторов с координатами . Отсюда видно, что  не является регулярной 1-формой.

Пусть  - регулярная незамкнутая 1-форма на многообразии  с рабочим расслоением  и распределение  является голономным. Из определения рабочего расслоения следует, что ограничение внешней 2-формы  на распределение  невырождено. Если рабочее расслоение  является голономным распределением, то по теореме Фробениуса в  существует подмногообразие . В этом случае получаем, что ограничение  на подмногообразие  есть симплектическая структура на  и  есть симплектическое подмногообразие. Таким образом, получаем:

**Предложение 2.5.** *Если на многообразии*  *размерности*  *существует регулярная 1-форма с радикалом ранга*  *и голономным рабочим расслоением, то в*  *содержится симплектическое подмногообразие размерности* *.*

Из следствия 2.4 вытекает, что на слоях рабочего расслоения  для любой незамкнутой регулярной 1-формы можно задать комплексную структуру. Более того, можно потребовать, чтобы такая комплексная структура сохраняла ограничение выбранной римановой метрики на рабочее расслоение . Это позволяет перейти к определению понятия аффинора, ассоциированного с 1-формой.

**§3. Аффинорные метрические структуры**

Пусть  - вещественное многообразие размерности не меньше 3,  - регулярная незамкнутая 1-форма на ,  - риманова метрика на  и  - рабочее расслоение, выбранное как ортогональное дополнение к радикалу 1-формы .

**Определение 3.1.** *Аффинором, ассоциированным с 1-формой* , *называется непрерывное поле эндоморфизмов*  *касательных пространств, удовлетворяющее условиям:*



Сразу из определения мы можем получить следующие свойства аффинора:

**Предложение 3.2.** *Пусть*  *- аффинор, ассоциированный с регулярной незамкнутой 1-формой*  *с рабочим расслоением*  *на многообразии* *. Тогда:*

1. *;*
2. *, где*  *- тождественный оператор на* *;*
3. *;*
4. *.*

**Доказательство.** Свойство 1 сразу следует из определения радикала 1-формы  и определения 3.1. Докажем свойство 2. Для любых  имеем:

 

Поскольку риманова метрика  невырождена на рабочем расслоении , получаем .

Докажем теперь свойство 3. При  равенство  выполняется в силу свойства 1 и равенств из определения 3.1. Для любых , используя свойство 2 и равенства из определения 3.1, получаем:

 

Свойство 4 непосредственно следует из определения 3.1. Предложение доказано.

Аффинор  легко описывается в локальном базисе касательного расслоения . Пусть  - регулярная 1-форма с нетривиальным радикалом на многообразии  размерности ,  - риманова метрика на  и  - локальный ортонормированный базис касательного расслоения в координатной окрестности точки . В силу следствия 2.4, ранг рабочего расслоения равен . Тогда в локальном базисе  матрица аффинора , ассоциированного с 1-формой , имеет вид:

 

Где  - кососимметричная матрица порядка  с коэффициентами , и матрица  имеет порядок .

Теперь мы можем определить аффинорную метрическую структуру на произвольном многообразии.

**Определение 3.3.** *Аффинорной метрической структурой на многообразии*  *называется четверка объектов* *, где*  *- незамкнутая регулярная 1-форма на* *,*  *- рабочее расслоение на* *,*  *- аффинор, ассоциированный с 1-формой* , *и*  *- риманова метрика на* *, относительно которой определяется аффинор*  *и рабочее расслоение* *.*

Отметим, что почти кэлерова структура с точной фундаментальной 2-формой на многообразии четной размерности определяет аффинорную метрическую структуру с радикалом ранга 0, а контактная метрическая структура на многообразии нечетной размерности есть аффинорная метрическая структура с радикалом ранга 1. Также примером аффинорной метрической структуры является почти контактная метрическая структура на многообразии нечетной размерности (см. [1]).

Пусть  - аффинорная метрическая структура на многообразии . Поскольку риманова метрика  задает изоморфизм между касательным и кокасательным расслоениями, на  существует векторное поле . По теореме Рисса о линейном функционале, векторное поле  является единственным. Будем называть такое векторное поле характеристическим векторным полем аффинорной метрической структуры. Несмотря на то, что 1-форма  является регулярной, характеристическое векторное поле  может обращаться в 0 в тех точках, в которых . Очевидно также, что . В общем случае, характеристическое векторное поле может как лежать в , так и не принадлежать радикалу.

**Определение 3.4.** *Аффинорная метрическая структура*  *с характеристическим векторным полем*  *называется строгой, если* *.*

Подробно свойства строгих аффинорных метрических структур изучены в [3]. Здесь нам понадобится только следующее свойство этих структур:

**Предложение 3.5.** *Пусть*  *- строгая аффинорная метрическая структура на многообразии*  *размерности не меньше 3. Тогда рабочее расслоение*  *лежит в ядре 1-формы* *.*

**Доказательство.** Пусть  - характеристическое векторное поле строгой аффинорной метрической структуры. Из равенства  следует, что векторное поле  ортогонально  относительно метрики . Из определения рабочего расслоения  следует, что распределения  и  ортогональны относительно метрики . Поскольку коразмерность ядра 1-формы равна 1 и , радикал 1-формы  не может лежать в . Получаем, что рабочее расслоение  лежит в ортогональном дополнении характеристического векторного поля . Но это ортогональное дополнение есть . Получаем, что , и предложение доказано.

Для дальнейших целей нам понадобится инвариантное определение внешнего дифференциала 1-формы на многообразии. Будем обозначать действие векторного поля  на функцию  через , а через  будем обозначать скобку Ли векторных полей и . Пусть  - нетривиальная 1-форма на многообразии . Тогда, для любых векторных полей и на 

 

**Предложение 3.6.** *Рабочее расслоение строгой аффинорной метрической структуры не может быть голономным распределением.*

**Доказательство.** Пусть  - строгая аффинорная метрическая структура на многообразии . Предположим, что рабочее расслоение  является голономным распределением. По теореме Фробениуса, голономное распределение является инволютивным. В силу предложения 3.5, для любых  равенство (2) принимает вид:

 

Поскольку распределение  инволютивно, . Получаем, что . Но это противоречит невырожденности  на рабочем расслоении. Следовательно, рабочее расслоение является неголономным, и предложение доказано.

В случае, когда рабочее расслоение  строгой аффинорной метрической структуры является вполне неголономным, получаем, что пара  есть субриманова структура на многообразии . Таким образом, получаем:

 **Предложение 3.7.** *Любая строгая аффинорная метрическая структура на многообразии*  *с вполне неголономным рабочим расслоением индуцирует на*  *субриманову структуру.*

Заметим, что понятие аффинора есть обобщение понятия ортогональной почти комплексной структуры (см. [5, глава 9]) для вещественных многообразий произвольной размерности. Если рабочее расслоение  нестрогой аффинорной метрической структуры на многообразии  является голономным распределением, то в  существует интегральное подмногообразие , и ограничение аффинора  на подмногообразие  задает на  почти комплексную структуру. Отсюда следует, что наличие на многообразии произвольной размерности аффинорной метрической структуры с голономным рабочим расслоением влечет существование в этом многообразии почти комплексного, а в случае интегрируемости почти комплексной структуры комплексного, подмногообразия.

Важным классом аффинорных метрических структур являются так называемые К-аффинорные метрические структуры. Аффинорная метрическая структура  называется К-аффинорной, если ее характеристическое векторное поле  является киллинговым векторным полем, т. е. . Здесь  означает производную Ли метрики  вдоль векторного поля . Здесь мы перечислим важные результаты для К-аффинорных метрических структур, доказательство которых дано в [2] и [3].

**Теорема 3.8.** *Пусть*  *- К-аффинорная метрическая структура с характеристическим векторным полем*  *на многообразии*  *размерности не меньше 3. Тогда:*

1. *, где*  *- связность Леви-Чивитта римановой метрики* *;*
2. *Для любого векторного поля* , *трансверсального характеристическому векторному полю* , *секционная кривизна в двумерном направлении*  *равна 1;*
3. *Если метрика*  *является эйнштейновой, то ее кривизна Риччи и скалярная кривизна положительны;*
4. *Если метрика*  *является эйнштейновой, то многообразие*  *является компактным и имеет конечную первую фундаментальную группу.*

**Теорема 3.9.** *Пусть*  *- К-аффинорная метрическая структура с характеристическим векторным полем* *,*  *- связность Леви-Чивитта метрики*  *и*  *- производная Ли в направлении векторного поля* *. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *К-аффинорная метрическая структура является строгой;*
2. *Характеристическое векторное поле*  *является геодезическим векторным полем, т. е.* *;*
3. *.*

В случае, когда рабочее расслоение  на многообразии  аффинорной метрической структуры не является голономным, в могут существовать подмногообразия, касающиеся распределения , на которых . Поскольку это необходимо для решения поставленной в разделе 1 задачи, сейчас мы перейдём к изучению таких подмногообразий.

**§4. Сублагранжевы подмногообразия**

Пусть  - вещественное многообразие размерности ,  - аффинорная метрическая структура на , и рабочее расслоение  является неголономным распределением на . Из теоремы 2.2 следует, что при  распределение  может иметь только ранг 0, 1 или 2. Будем называть нетривиальными подмногообразиями многообразия  подмногообразия размерности от 2 до . Когда ранг рабочего расслоения ,  не содержит нетривиальных подмногообразий, касающихся распределения . Поэтому, для определения сублагранжевых подмногообразий необходимо рассматривать многообразия размерности не меньше 5.

**Определение 4.1.** *Сублагранжевым подмногообразием для аффинорной метрической структуры*  *на многообразии*  *размерности*  *называется максимальное нетривиальное подмногообразие*  *и* *.*

Напомним, что из определения рабочего расслоения следует, что ограничение  на распределение  невырождено, а, следовательно, размерность сублагранжева подмногообразия не может совпадать с рангом рабочего расслоения. Кроме того, в определении 4.1 не требуется, чтобы рабочее расслоение было неголономным распределением. Таким образом, понятие сублагранжева подмногообразия определено для любой аффинорной метрической структуры. В силу следствия 2.4, рабочее расслоение всегда имеет четный ранг. Из определения 4.1 вытекает первоначальная оценка размерности сублагранжевых подмногообразий. Если  - ранг рабочего расслоения, а - размерность сублагранжева подмногообразия, то . В случае, когда ранг радикала 1-формы  равен 0, сублагранжево подмногообразие есть классическое лагранжево подмногообразие для симплектической структуры . Сейчас мы получим более точную оценку размерности сублагранжевых подмногообразий.

**Теорема 4.2.** *Пусть*  *- аффинорная метрическая структура на многообразии*  *размерности* *, и рабочее расслоение*  *имеет ранг* *. Тогда, размерность сублагранжева подмногообразия для этой аффинорной метрической структуры не может превышать* *.*

**Доказательство.** Пусть  - сублагранжево подмногообразие в  и  - размерность подмногообразия . Используя определения 3.1 и 4.1 для любых , получаем:

 

Мы получаем, что распределения  и  являются ортогональными относительно метрики . Поскольку  и  получаем:

 

Окончательно получаем , и теорема доказана.

**Следствие 4.3.** *Если ранг рабочего расслоения аффинорной метрической структуры на многообразии*  *равен 2, то*  *не содержит сублагранжевых подмногообразий для этой аффинорной метрической структуры.*

**Замечание 4.4.** Если  - сублагранжево подмногообразие для аффинорной метрической структуры , то для любого нетривиального подмногообразия  .

Для строгих аффинорных метрических структур получать сублагранжевы многообразия достаточно просто. Для этого достаточно взять максимальное подмногообразие подходящей размерности, касающееся рабочего расслоения.

**Теорема 4.5.** *Пусть*  *- строгая аффинорная метрическая структура на многообразии*  *и*  *- максимальное нетривиальное подмногообразие в* *, касающееся распределения* *. Тогда,*  *есть сублагранжево подмногообразие для этой аффинорной метрической структуры.*

**Доказательство.** Для того чтобы показать, что  является сублагранжевым подмногообразием, достаточно доказать, что . Согласно предложения 3.5, . Поскольку распределение  является инволютивным, для любых  имеем . Используя равенство (2) из раздела 3, получаем:

 

Таким образом, выполнено определение 4.1, и теорема доказана.

**Следствие 4.6.** *Пусть*  *- строгая аффинорная метрическая структура на многообразии*  *с рабочим расслоением ранга* *. Тогда размерность любого подмногообразия в* *, касающегося распределения* *, не может превышать* *.*

Отдельный интерес представляют подмногообразия размерности 2, касающиеся рабочего расслоения. Пусть  - односвязное многообразие размерности не меньше 5 и  - строгая аффинорная метрическая структура на  с рабочим расслоением ранга . Поскольку на односвязном многообразии любая замкнутая кривая является границей двумерной поверхности, получаем, что любая замкнутая кривая на  порождает двумерное подмногообразие. Пусть  - замкнутая кривая на , касающаяся рабочего расслоения , такие кривые называются сублежандровыми кривыми, а  - двумерное подмногообразие такое, что его граница есть . Пусть  - касательный вектор к кривой . Очевидно, что . Из свойств аффинора, полученных в предложении 3.2, следует, что аффинор  действует на распределении  инвариантно и является линейным автоморфизмом рабочего расслоения . Отсюда следует, что , векторные поля  и  трансверсальны во всех точках, где , и подмногообразие  касается распределения . Теперь, из теоремы 4.5 следует, что  содержится в сублагранжевом подмногообразии либо совпадает с ним. Таким образом, получаем следующий результат:

**Теорема 4.7.** *Пусть*  *- односвязное многообразие размерности не меньше 5, и*  *- строгая аффинорная метрическая структура на*  *с рабочим расслоением ранга не меньше 4. Тогда,*  *содержит сублагранжево подмногообразие размерности как минимум 2, и любая замкнутая кривая на* *, касающаяся распределения* *, является границей двумерного подмногообразия, которое содержится в сублагранжевом подмногообразии.*

**Замечание 4.8.** Из теоремы 4.7 следует, что любая замкнутая кривая на односвязном многообразии, касающаяся рабочего расслоения строгой аффинорной метрической структуры, всегда содержится в сублагранжевом подмногообразии.

Пусть  - нестрогая аффинорная метрическая структура с характеристическим векторным полем . Обозначим через  проекцию векторного поля  на рабочее расслоение , а через  обозначим проекцию векторного поля  на . Тогда, , и для любого векторного поля 

 

Таким образом, изучение нестрогих аффинорных метрических структур сводится к случаю, когда характеристическое векторное поле лежит в рабочем расслоении. Далее будем считать, что . Обозначим через  распределение . Рабочее расслоение  раскладывается в ортогональную сумму прямой, порожденной характеристическим векторным полем  и распределения . Пусть  - двумерное подмногообразие, касающееся распределения . Для любых  имеем , , . Используя равенство (2) из раздела 3, получаем:

 

Откуда  и  содержится в сублагранжевом подмногообразии.

Пусть теперь  - двумерное подмногообразие, касающееся распределения  так, что характеристическое векторное поле  касается . Поскольку коразмерность распределения  в распределении  всегда равна 1, на многообразии  существует векторное поле . Тогда векторные поля  и  образуют ортогональный базис касательного расслоения . Поскольку , из равенства (2) в разделе 3 получаем:

 

Пусть  - производная Ли тензорного поля  в направлении векторного поля . Существует выражение производной Ли 1-формы  через скобки Ли векторных полей (см. [5, глава 1]):

 

для любых векторных полей . Используя это выражение, получаем:

 

Отсюда получаем, что  тогда и только тогда, когда  на . Таким образом, получаем следующий конечный результат:

**Теорема 4.9.** *Пусть*  *- аффинорная метрическая структура на многообразии*  *размерности не меньше 5 с характеристическим векторным полем*  *и*  *- двумерное подмногообразие, касающееся рабочего расслоения* *. Тогда:*

1. *Если подмногообразие*  *касается распределения* *, то* *;*
2. *Если характеристическое векторное поле*  *касается*  *и*  *- векторное поле на* *, ортогональное*  *относительно метрики* *, то*  *тогда и только тогда, когда*  *на* *.*

Теперь мы рассмотрели все свойства аффинорных метрических структур, необходимые для решения задачи, поставленной в разделе 1.

**§5. Физические приложения аффинорных метрических структур**

Пусть  - односвязное многообразие размерности не меньше 3,  - векторное поле на  и - риманова метрика на . Тогда на  определена глобальная 1-форма . В локальных координатах 1-форма  имеет вид , где  - векторное поле бесконечно малого смещения. Определим следующий функционал на пространстве всех замкнутых кривых:

 

где  - замкнутая кривая на многообразии . Значение этого функционала на кривой используется в разных разделах физики. В механике  это работа, которую совершает сила, перемещающая тело по замкнутой траектории . В электродинамике  это работа циркуляции электродвижущей силы в замкнутом проводнике . В теории струн каждая элементарная частица представляется как кривая конечной длины в пространстве Калаби-Яу. Для частицы, отождествляемой с замкнутой кривой  , *это действие векторного поля* *, например, поля гравитации, на частицу. Возникает задача определить, для каких кривых функционал*  *принимает ненулевые значения.*

Поскольку многообразие  односвязно, для любой замкнутой кривой , заданной на отрезке , существует гомотопия кривой  в точку :

 

Тогда, образ двумерной области  под действием отображения  есть двумерная поверхность в , границей которой является кривая . Будем обозначать эту поверхность через . По формуле Стокса имеем:

 

Если ограничение 1-формы  на  - замкнутая 1-форма, то . Если  - незамкнутая регулярная 1-форма на , то, обозначая через  ортогональное дополнение к распределению  относительно метрики  и определяя аффинор  как в разделе 3, получаем аффинорную метрическую структуру  с рабочим расслоением  и характеристическим векторным полем . Обозначим через  и  проекции векторных полей  и  на рабочее расслоение  соответственно. Если  или , то  и . Если , то, в силу пункта 1 теоремы 4.9,  и . Кроме того, из теоремы 4.7 следует, что при  поверхность  содержится в сублагранжевом подмногообразии, и . Таким образом, получаем:

**Предложение 5.1.** *Если замкнутая кривая*  *на многообразии*  *является границей двумерной поверхности* *,*  *- незамкнутая регулярная 1-форма на* *, и выполнено одно из условий:*

1. *На*  *существует векторное поле, лежащее в радикале 1-формы* *;*
2. *На*  *существует пара трансверсальных векторных полей, проекции которых лежат в ядре 1-формы* *;*
3. *1-форма*  *порождает строгую аффинорную метрическую структуру,*

*то* *.*

Остается рассмотреть случай, когда , и ограничение характеристического векторного поля  на  есть векторное поле на . В этом случае на  существует векторное поле . Из пункта 2 теоремы 4.9 следует, что

 

Здесь  - область изменения параметров  и ,  - производная Ли 1-формы  в направлении векторного поля . Заметим, что если , то  (см. определение 3.1), а следовательно . Кроме того, в этом случае ограничение аффинора  на  есть почти комплексная структура на . Так как любая почти комплексная структура на двумерном многообразии всегда интегрируема (см. [5, глава 9]), ограничение аффинора  есть комплексная структура на . Физический смысл условия  состоит в том, что угол между векторным полем  на кривой  и касательным векторным полем  не превышает 90 градусов в любой точке кривой. Обозначим через  проекцию векторного поля  на рабочее расслоение . Теперь мы получаем следующий результат:

**Предложение 5.2.** *Пусть*  *- аффинорная метрическая структура на многообразии*  *с характеристическим векторным полем* *. Если замкнутая кривая*  *является границей двумерной поверхности* *, и на*  *существует пара ортогональных векторных полей* *, то* *.*

Заметим, что это предложение неприменимо в случае, когда функция  принимает на поверхности  и положительные, и отрицательные значения. В этом случае необходим другой критерий отличия от нуля функционала . Пусть  - произвольная замкнутая кривая, заданная на отрезке ,  - двумерная поверхность, границей которой является кривая , и ограничение  на  есть невырожденная внешняя 2-форма на . В этом случае  есть симплектическое подмногообразие в . Пусть  - бесконечно малая последовательность такая, что  для всех натуральных . Обозначим отрезок  через , а его длину через . Очевидно, что . Кроме того, определены последовательности  и , где , . Имеем:

 

Отсюда:

 

Поскольку последовательность  ограничена,  тогда и только тогда, когда последовательности  и  являются бесконечно малыми. Таким образом, получаем следующий критерий:

**Предложение 5.3.** *Если замкнутая кривая*  *на многообразии*  *является границей двумерной поверхности* *,*  *- незамкнутая регулярная 1-форма на* *, и ограничение*  *на*  *есть симплектическая структура на* *, то*  *тогда и только тогда, когда* *.*

**Замечание 5.4.** Критерий из предложения 5.3 применим к произвольной замкнутой кривой  даже на неодносвязном многообразии, когда кривая  не является границей двумерной поверхности.

Таким образом, мы рассмотрели все случаи, и поставленная в начале задача решена.

**Список литературы**

[1] Calvaruso G. *Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures* // Journal of Geometry and Physics, Vol. 69, 2013, P. 60-73.

[2] Корнев Е.С. *Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли* // Сиб. матем. журн., 2012, т. 53, №1, С. 107-123.

[3] Корнев Е.С. *Аффинорные структуры на векторных расслоениях* // Сиб. матем. журн., 2014, т. 55, №6, С. 1283-1296.

[4] Корнев Е.С., Славолюбова Я.В. *Инвариантные аффинорные и субкэлеровы структуры на однородных пространствах* // Сиб. матем. журн., 2016, т. 57, №1, С. 51-63.

[5] Ш. Кобаяси, К. Намидзу. *Основы дифференциальной геометрии.* В 2 т., Москва: Наука, 1981.