Расслоения над сферой S^4

Евгений Корнев

2018

Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^3$ диффеоморфно S^7/S^1. каждая комплексная прямая в $\mathbb{C}^4$ порождается точкой сферы S^7 вложенной в $\mathbb{C}^4$. Группа $\mathrm{SU}(4)$ транзитивно действует на S^7. Подгруппа изотропии точки $(1,0,0,0)$ состоит из матриц:

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},\ A \in \mathrm{SU}(3).$$

Отображение такой матрицы в матрицу $e^{i\phi}A$ задает изоморфизм подгруппы изотропии на группу $\mathrm{U}(3)$. Получаем $\mathbb{C}P^3$ диффеоморфно $\mathrm{SU}(4)/\,\mathrm{U}(3)$. Обобщая это, получаем:

Предложение 1. *n-мерное комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ есть однородное пространство* $\mathrm{SU}(n+1)/\,\mathrm{U}(n)$.

Комплексное пространство $\mathbb{C}^4$ можно отождествить с кватернионным пространством $\mathbb{H}^2$, считая $q_1 = z_1 + z_2 j,\ q_2 = z_3 + z_4 j,\ j = \sqrt{-1}$. Введем на $\mathbb{H}^2 \setminus \{0\}$ две функции:

$$f(q_1, q_2) = 2\,\frac{q_1 \bar{q}_2}{|q_1|^2 + |q_2|^2},$$

$$h(q_1, q_2) = \frac{|q_1|^2 - |q_2|^2}{|q_1|^2 + |q_2|^2}.$$

Функции f и h удовлетворяют свойству $|f(q_1,q_2)|^2 + |h(q_1,q_2)|^2 = 1$. Также эти функции инвариантны относительно умножения (q_1, q_2) на ненулевой кватернион. Введем проекцию $\pi : \mathbb{H}^2 \setminus \{0\} \to S^4$: $\pi(q_1,q_2) = (f(q_1,q_2), h(q_1,q_2)) \in \mathbb{R}^5$. Пусть группа $\mathbb{C}^*$ действует на $\mathbb{H}^2$ гомотетиями.

Тогда $\mathbb{C}P^3$ есть $(\mathbb{H}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$. Так как проекция π $\mathbb{C}^*$-инвариантна, π есть проекция $\mathbb{C}P^3 \to S^4$. Каждый ненулевой кватернион q порождает комплексную прямую в $\mathbb{C}^2$. Если $q \neq 0$, то $\pi(qq_1, qq_2) = \pi(q_1, q_2)$. Отсюда слой расслоения над $\mathbb{C}P^3 \to S^4$ есть $(\mathbb{H} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}P^1 \cong S^2$.

Пусть $z = (q_1, q_2) \in CP^3$, $x = \pi(q_1, q_2) \in S^4$, h – метрика Фубини-Штуди на $\mathbb{C}P^3$, и J_0 – комплексная структура на $\mathbb{C}P^3$ индуцированная умножением на мнимую единицу. Обозначим через D_z ортогональное дополнение к $T_z\mathbb{C}P^1$ относительно метрики h. Тогда $T_z\mathbb{C}P^3 = D_z \oplus T_z\mathbb{C}P^1$. Поскольку комплексная структура J_0 ортогональна и инвариантно действует на $T_z\mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{C}$, ограничение J_0 на D_z есть комплексная структура в пространстве D_z. Обозначим ограничение J_0 на D_z через I_z. Эта комплексная структура определяет комплексную структуру $J_z = d\Pi \circ I_z d\pi^{-1}$ в касательном пространстве T_xS^4. Заметим, что комплексная структура J_z сохраняет ориентацию в T_xS^4, поскольку I_z сохраняет ориентацию в D_z. Таким образом, каждой точке $z = (q_1, q_2) \in \mathbb{C}P^3$ можно непрерывным образом сопоставить точку $x = \pi(q_1, q_2) \in S^4$ и сохраняющую ориентацию комплексную структуру J_z в касательном пространстве T_xS^4. Мы получили, что $\mathbb{C}P^3$ есть твисторное расслоение над S^4.

Предложение 2. *Твисторное расслоение $\mathbb{C}P^3 \to S^4$ не является тривиальным.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{C}P^3$ допускает кэлерову структуру, на $\mathbb{C}P^3$ существует симплектическая структура. Если $S^4 \times S^2$ дифффеоморфно $\mathbb{C}P^3$, на $S^4 \times S^2$ существует симплектическая структура. группа когомологий $H^2(S^4 \times S^2, \mathbb{Z})$ одномерна и порождается формой объема Ω_2 на S^2. Поскольку любая точная 2-форма на компактном многообразии без края всегда вырождена, симплектическая структура принадлежит классу когомологий 2-формы Ω_2. Но 2-форма Ω_2 вырождается на касательном пространстве к S^4. Следовательно $S^4 \times S^2$ не допускает симплектических структур. □

Замечание 3. Все группы гомологий и когомологий $S^4 \times S^2$ и $\mathbb{C}P^3$ изоморфны, но сами эти многообразия не диффеоморфны.

Предложение 4. *Расслоение $\mathbb{C}P^3 \to S^4$ не допускает глобального сечения.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{C}P^3 \cong S^7/S^1$, S^7 есть расслоение Хопфа над $\mathbb{C}P^3$. Пусть ξ – векторное поле на S^7, касательное к орбите действия

S^1 на S^7, h – риманова метрика на S^7, индуцированная вложением S^7 в $\mathbb{C}^4$, и $\alpha = h(\xi, .)$ – S^1-инвариантная 1-форма на S^7. Поскольку $d\alpha$ есть S^1-инвариантная 2-форма на S^7 и $\ker\alpha$ есть ортогональное дополнение к векторному полю ξ, на $\mathbb{C}P^3$ не существует 1-формы, которая поднимается до 1-формы α. Таким образом $d\alpha$ индуцирует на $\mathbb{C}P^3$ замкнутую неточную 2-форму Ω.

Если на S^4 существует глобальное сечение s расслоения $\mathbb{C}P^3$, то s индуцирует естественный гомоморфизм $s^* : H^2(\mathbb{C}P^3, \mathbb{R}) \to H^2(S^4, \mathbb{R})$. Поскольку $s^*(\Omega)$ есть замкнутая 2-форма на S^4, и $H^2(S^4, \mathbb{R}) = 0$, $s^*(\Omega)$ есть точная 2-форма на S^4, т.е. существует 1-форма $\eta : d\eta = s^*(\Omega)$. Проекция $\pi : \mathbb{C}P^3 \to S^4$ индуцирует естественный гомоморфизм $\pi^* : H^2(S^4, \mathbb{R}) \to (\mathbb{C}P^3, \mathbb{R})$, а также $s^* \circ \pi^* = \mathrm{id}$. Имеем:

$$d\pi^*(\eta) = \pi^*(d\eta) = \pi^*(s^*(\Omega)) = \Omega,$$

т.е. Ω есть точная 2-форма. □

Поскольку любая почти комплексная структура на S^4 ортогональна относительно некоторой метрики, а значит является сечением расслоения $\mathbb{C}P^3$, получаем:

Следствие 5. *Сфера S^4 не допускает почти комплексных структур.*

Рассмотрим вложение $\mathbb{C}P^2$ в $\mathbb{C}P^3$, считая, что в паре (q_1, q_2) $q_2 = z_2 \in \mathbb{C}$. Имеем: $(qq_1, qz_2) \in \mathbb{C}P^2$ только когда $qz_2 \in \mathbb{C}$. Это возможно только когда q есть ненулевое комплексное число. Заметим, что $\Pi(q_1 i, z_2) = \pi(q_1, iz_2)$, а точки $(-q_1 i, z_2)$, (q_1, iz_2) не лежат на одной комплексной прямой, так как $-q_1 i \neq iq_1$. Получаем, что слой при ограничении проекции π на $\mathbb{C}P^2$ есть Z_2. Всякое расслоение со слоем Z_2 есть двулистное накрытие. Получаем, что $\mathbb{C}P^2$ двулистно накрывает S^4. Заметим, что любое подмногообразие в $\mathbb{C}P^3$ вещественной размерности 4 является расслоением с дискретным слоем, поскольку размерность слоя не может быть в этом случае больше нуля.

Пусть Y – расслоение над S^4 с проекцией π. Будем называть подмногообразие $X \subset Y$ обертывающим, если $\pi(X) = S^4$, и для любых двух точек $x, y \in S^4$ множества $\pi^{-1}(x) \cap X$ и $\pi^{-1}(y) \cap X$ гомеоморфны.

Теорема 6. *Пусть Y – гладкое многообразие, являющиеся расслоением над S^4 со слоем F, и X – гладкое подмногообразие в Y. Тогда:*

1) Если $\dim(X) < 4$, *то* X *не может быть расслоением над* S^4*;*

2) Если X *– обертывающее подмногообразие, и* $\dim(X) = 4$, *то либо* X *диффеоморфно* S^4, *либо* X *есть накрытие* S^4*;*

3) Если X *– обертывающее подмногообразие, и* $\dim(X) > 4$, *то* X *есть расслоение над* S^4 *со слоем* $X \cap F$.

Следствие 7. *Если* X *– комплексное трехмерное обертывающее подмногообразие в* $\mathbb{C}P^3$, *то* X *есть расслоение над* S^4 *со слоем* L, *где* L *– комплексное подмногообразие в* $\mathbb{C}P^1$.

Как было показано выше, $\mathbb{C}P^2$ есть пример обертывающего подмногообразия в $\mathbb{C}P^3$.

Введем в $\mathbb{C}P^3$ подмножества

$$W_k = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}P^3 : z_k = 1,\ z_l = 0 \quad \text{при} l < k\}.$$

имеем:

$$W_1 = \{(1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}P^3\},\ W_2 = \{(0, 1, z_3, z_4) \in \mathbb{C}P^3\},$$
$$W_3 = \{(0, 0, 1, z_4) \in \mathbb{C}P^3\},\ W_4 = (0, 0, 0, 1),$$
$$W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap W_4 = \emptyset,$$
$$\mathbb{C}P^3 = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4.$$

В кватернионном виде множество $W_2 \cup W_4$ состоит из точек $(j, q_2) \cup (0, j)$. Любые две точки из этого множества не лежат на одной прямой. Отсюда проекция π есть диффеоморфизм $W_2 \cup W_4 \to S^4$. Заметим, что $W_3 \subset \mathbb{C}P^1$, а любая комплексная функция $f(z)$ на $\mathbb{C}$ определяет комплексное подмногообразие $(1, f(z)) \subset \mathbb{C}P^1$. Определим действие этого подмногообразия как умножение на кватернион $Q(z) = 1 + f(z)j$. Тогда множество $\{(q(z)q_1, q(z)q_2) : (q_1, q_2) \in W_2 \cup W_4\}$ есть расслоение над S^4 со слоем $f(D)$, где D – область определения функции f. Таким образом получаем:

Предложение 8. *Пусть* f *– непрерывная функция в области* $D \subseteq \mathbb{C}$. *Тогда над* S^4 *существует расслоение со слоем* $f(D)$ *и пространством расслоения*

$$P = \{(q(z)q_1, q(z)q_2),\ (q_1, q_2) \in W_2 \cup W_4,\ z \in D\}.$$

Заметим, что любое комплексное подмногообразие, лежащее в W_3 имеет вид: $(0, 0, 1f(z))$, где f – непрерывная функция в области комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Отсюда получаем:

Следствие 9. *Каждое комплексное подмногообразие $f(z) \subset W_3$ индуцирует расслоение над S^4 со слоем $f(D)$, где D – область определения функции f.*

Замечание 10. Поскольку разные комплексные подмногообразия в W_3 могут определять одно и то же расслоение, или определять изоморфные расслоения, более корректно рассматривать классы эквивалентных комплексных подмногообразий, где два подмногообразия считаются эквивалентными, если они определяют изоморфные расслоения над S^4.

Пример 1. Пусть $D = \mathbb{C}^*$. Тогда на D определена функция $f(z) = \frac{z}{|z|}$. $f(\mathbb{C}^*) = S^1$. Эта функция определяет на S^4 расслоение со слоем S^1.

Пример 2. Пусть D есть комплексная плоскость с разрезом по лучу $[0, +\infty)$. Тогда на D определена функция $f(z) = \sqrt{z}$. $f(D)$ есть верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. Эта функция определяет над S^4 расслоение со слоем $\}(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Пример 3. Пусть $D = \mathbb{C}$, и на $\mathbb{C}$ задана функция $f(z) = \operatorname{Re} z e^{i \operatorname{Re} z}$. Эта функция определяет над S^4 расслоение с одномерным слоем в виде спирали.

Задача получения на S^4 расслоения с двумерным слоем D сводится к поиску в области D биголоморфной функции f. Если такая функция существует, то $f^{-1}(D)$ есть прообраз области D, а функция f^{-1} задает расслоение со слоем D. Таким образом получаем:

Предложение 11. *Пусть D –двумерная область в $\mathbb{C}$. Если в области D существует биголоморфная функция, то над S^4 существует расслоение со слоем D.*

Поскольку любые два двумерных диска можно отобразить один в другой посредством дробно-линейной комплексной функции, а любая дробно-линейная функция биголоморфна в области своего определения, получаем:

Следствие 12. *Над S^4 существует расслоение со слоем D_2, где D_2 – открытый или замкнутый двумерный диск.*

Пусть V – векторное пространство произвольной размерности не меньше 3, и Ω – кососимметричная 2-форма на V. Радикалом 2-формы Ω называется максимальное векторное подпространство

$$rad\,\Omega = \{X \in V : \Omega(X, .) = 0\}.$$

Поскольку любая кососимметричная 2-форма на векторном пространстве нечетной размерности вырождена, коразмерность подпространства $rad\,\Omega$ всегда четна. Отсюда, 2-форма Ω всегда невырождена на любом подпространстве D дополнительным к $rad\,\Omega$.

Субтвисторной структурой на векторном пространстве V произвольной размерности называется четверка (Ω, D, Φ, g), где Ω – ненулевая кососимметричная 2-форма на V, g – риманова метрика на V, D – ортогональное дополнение к $rad\,\Omega$ относительно метрики g, а Φ– линейный оператор в V, удовлетворяющий свойствам:

$$\Omega(X, Y) = g(\Phi X, Y),\ X, Y \in V,$$
$$g(X, Y) = G(\Phi X, \Phi Y),\ X, Y \in D.$$

Оператор Φ называется аффинором субтвисторной структуры. Сразу из определения субтвисторной структуры можно получить следующие свойства аффинора:

1) $\ker \Phi = rad\,\Omega$;

2) $\Phi^2|_D = -\,\mathrm{id}$;

3) $\Omega \circ \Phi = \Omega$;

4) $\Omega(X, \Phi X) \geq 0,\ X \in V$.

Заметим, что ограничение субтвисторной структуры на подпространство D есть классическая твисторная структура на D. В случае когда $\dim(V) = 4$, имеем, что либо $\dim(rad\,\Omega) = 0$, либо $dim(rad\,\Omega) = 2$. Поскольку риманова метрика g на S^4 определяет риманову метрику g_xв касательном пространстве T_xS^4, можно рассматривать над S^4 расслоение со слоем, состоящим из пар (Ω_x, Φ_x), где Ω_x – кососимметричная 2-форма на T_xS^4, а Φ_x – аффинор субтвисторной структуры $(\Omega_x, D_x, \Phi_x, g_x)$, D_x определяется как ортогональное дополнение к $rad\,\Omega_x$, $\dim(rad\,\Omega_x) = r \geq 0$. Такое расслоение называется субтвисторным расслоением с радикалом ранга r. Так как в $\mathbb{R}^2$ существует единственная, с точностью до умножения на -1 ортогональная комплексная структура и единственная кососимметричная 2-форма, для которой эта комплексная структура задает аффинор, слой субтвисторного расслоения с радикалом ранга 2 в точке $x \in S^4$ есть $\pm(\Omega_x, \Phi_x)$. Сопоставим точке $(q, z) \in \mathbb{C}P^2$ пару $\epsilon(\Omega_x, \Phi_x($, $x = \pi(q, z)$, $\epsilon = \mathrm{sign}(Re(qz))$. При таком сопоставлении точке (q, iz) соответствует пара $\epsilon(\Omega_x, \Phi_x)$, а точке $(-qi, z)$ соответствует пара $-\epsilon(\Omega_x, \Phi_x)$, $\epsilon = \mathrm{sign}(\mathrm{Re}(qiz))$. Мы получаем, что $\mathbb{C}P^2$ есть субтвисторное расслоение с радикалом ранга 2 над S^4.

Поскольку для субтвисторного расслоение не требуется сохранение аффинором ориентации, субтвисторное расслоение с радикалом ранга 0 над S^4 есть $\mathbb{C}P^3 \times Z_2$ с проекцией $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$, где π_1 – проекция $\mathbb{C}P^3 \to S^4$, π_2 – проекция $\mathbb{C}P^2 \times Z_2 \to \mathbb{C}P^2$. Таким образом мы описали все субтвисторные расслоения над S^4.