УДК 514.763

Е. С. Корнев

Субтвисторные структуры и субтвисторное расслоение

В работе вводится понятие субтвисторной структуры и субтвисторного расслоения. Рассмотрены частные случаи субтвисторных структур - субкэлеровы структуры. Описано субтвисторное расслоение для четырехмерной сферы. Приведены примеры многообразий, допускающих и не допускающих субтвисторную структуру. Приведены условия существования на вещественном многообразии произвольной размерности субкэлеровой структуры, что влечет существование кэлеровых подмногообразий.

Ключевые слова: субтвисторная структура, субкэлерова структура, субтвисторное расслоение, радикал внешней формы.

§ 1. Введение

В теории кэлеровых и комплексных многообразий хорошо известны понятие твисторного расслоения и твисторной структуры. В этой работе изучается обобщение понятия твисторного расслоения - субтвисторное расслоение. В [5] введено понятие субтвисторной структуры как обобщение твисторной структуры на случай вырожденной кососимметричной 2-формы на многообразии произвольной размерности. Для построения субтвисторного расслоения на многообразии M произвольной размерности необходимо задать в каждой точке из M кососимметричную 2-форму Ω, множество всех аффиноров, ассоциированных с Ω в этой точке, и множество всевозможных скалярных произведений в векторном пространстве $\mathrm{rad}\Omega_x$, которое является радикалом (в другой терминологии ядром) 2-формы Ω в точке x. При этом, 2-форма Ω может быть вырожденной, то есть иметь ненулевой радикал. В отличии от классического твисторного расслоения, субтвисторное расслоение можно определить для многообразия любой размерности, как четной, так и не четной. В данной работе приведены примеры многообразий, которые допускают или не допускают субтвисторную структуру, а также дано описание субтвисторного расслоения для некоторых многообразий.

Интерес к изучению вырожденных кососимметричных 2-форм обусловлен задачами получения симплектических и кэлеровых подмногообразий в многообразиях произвольной размерности. Например, в [1] изучаются однородные пространства с инвариантной вырожденной кососимметричной замкнутой 2-формой, а в [4, 5] рассматриваются субкэлеровы структуры, с помощью которых можно получать кэлеровы подмногообразия. Кроме того, субтвисторные структуры возникают в различных физических приложениях римановой геометрии, в частности, в теории струн, аналитической механике и теории пространств Калаби-Яу.

Чтобы определить на многообразии M субтвисторную структуру, необходимо задать на M регулярную кососимметричную 2-форму Ω с ненулевым радикалом $\mathrm{rad}\Omega$, дополнительное к $\mathrm{rad}\Omega$ распределение касательных подпространств D, на котором 2-форма Ω не вырождена, аффинор Φ, который является обобщением понятия почти комплексной структуры, ассоциированной с Ω, и скалярное произведение на распределении $\mathrm{rad}\Omega$, которое называется метрикой радикала, с помощью которого можно получить глобальную риманову метрику на многообразии M. Субтвисторные структуры с замкнутой 2-формой Ω позволяют определить понятие субкэлеровой структуры (см. [5]), а субтвисторные структуры с точной 2-формой Ω позволяют получить аффинорные метрические структуры (см. [2, 3], которые являются обобщением контактных метрических структур для многообразий любой размерности и алгеброидов Ли. В этой работе мы показываем, как с помощью субтвисторных и субкэлеровых структур можно получать в в многообразии произвольной вещественной размерности кэлеровы подмногообразия, а также получать субтвисторное расслоение для многообразий, на которых не существует симплектической или кэлеровой структуры.

В разделе 2 даются необходимые сведения и свойства для субтвисторных структур введенных в [5]. В разделе 3 рассматривается частный случай субтвисторных структур - субкэлеровы структуры, а также даются условия, при которых субтвисторная структура определяет субкэлерову структуру. В разделе 4 вводится понятие субтвисторного расслоения и показано, как оно связано с вопросом существования на многообразии субтвисторной структуры. В разделе 5 описывается субтвисторное расслоение для четырехмерной сферы. В разделе 6 изучаются инвариантные субтвисторные структуры и приведены однородные примеры субтвисторных структур. В данной работе используются результаты и понятия, ранее описанные в [4] и [5].

§ 2. Субтвисторные структуры

Пусть M – гладкое вещественное многообразие размерности $n \geqslant 3$, Ω – билинейная форма на M и X – гладкое векторное поле на M. Будем обозначать через $\mathrm{I}_X\,\Omega$ внутреннее произведение векторного поля X и билинейной формы Ω, результатом которого является 1-форма $\mathrm{I}_X\,\Omega$ такая, что для любого векторного поля Y на M $\mathrm{I}_X\,\Omega(Y) = \Omega(X, Y)$.

Определение 2.1. Радикалом билинейной формы Ω на многообразии M в точке x называется касательное подпространство $\mathrm{rad}\Omega_x = \{v \in T_xM : \mathrm{I}_v\,\Omega_x = 0\}$.

Форма Ω называется регулярной, если распределение радикалов $\mathrm{rad}\Omega$ имеет постоянный ранг на M.

Через $\mathrm{rad}\Omega$ будем обозначать распределение радикалов билинейной формы Ω на многообразии M. Иногда радикал билинейной формы Ω называют ядром Ω. Очевидно, что билинейная форма Ω не вырождена тогда и только тогда, когда $\mathrm{rad}\Omega = \{0\}$.

Теорема 2.2. *Пусть M – гладкое многообразие размерности $n \geqslant 3$, Ω – кососимметричная регулярная 2-форма на M, и r – ранг распределения* $\mathrm{rad}\Omega$. *Тогда:*

1) *Если n четно, то r также четно, и $0 \leqslant r \leqslant n-2$;*
2) *Если n нечетно, то r также нечетно, и $1 \leqslant r \leqslant n-2$;*
3) *Если $d\Omega = 0$, то* $\mathrm{rad}\Omega$ *есть голономное распределение на M.*

Доказательство пунктов 1 и 2 можно найти в [2], а доказательство пункта 3 можно найти в [5]. Пусть D – распределение касательных подпространств на многообразии M дополнительных к $\mathrm{rad}\Omega$ таких, что ограничение 2-формы Ω на любой слой этого распределения не вырождено. Такое распределение называется рабочим расслоением для 2-формы Ω. Из теоремы 2.2 следует, что рабочее расслоение D имеет четный ранг для многообразия любой размерности. Этот факт позволяет ввести важное понятие аффинора, ассоциированного с регулярной кососимметричной 2-формой.

Определение 2.3. Пусть Ω – регулярная кососимметричная 2-форма на многообразии M, и D рабочее расслоение для 2-формы Ω. Аффинором, ассоциированным с 2-формой Ω, называется непрерывное поле Φ эндоморфизмов касательных подпространств на M, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\ker\Phi = \mathrm{rad}\Omega$;
2) $\Phi^2|_D = -\,\mathrm{id}$, где id – поле тождественных операторов на M;
3) $\Omega \circ \Phi = \Omega$;
4) для любого векторного поля $X \in C^1(TM)$ $\Omega(X, \Phi X) \geqslant 0$;

Сразу из определения получаем следующие важные свойства аффинора:

Предложение 2.4. *Пусть Φ – аффинор, ассоциированный с регулярной кососимметричной 2-формой Ω на многообразии M, и D – рабочее расслоение для Ω.*

1) *Ограничение аффинора Φ на рабочее расслоение D есть комплексная структура в слоях распределения D, сохраняющая 2-форму Ω;*
2) *Для любой непрерывной функции λ на M такой, что $\lambda(x) > 0$ для всех $x \in M$ Φ есть аффинор, ассоциированный с 2-формой $\lambda\Omega$;*
3) *Для любой непрерывной функции μ на M такой, что $\mu(x) < 0$ для всех $x \in M$ $-\Phi$ есть аффинор, ассоциированный с 2-формой $\mu\Omega$.*

Пусть Ω – регулярная кососимметричная 2-форма на многообразии M с рабочим расслоением D, и Φ – аффинор, ассоциированный с 2-формой Ω. Обозначим через Ω_Φ симметричную 2-форму на M такую, что для любых векторных полей $X, Y \in C^1(TM)$

$$\Omega_\Phi(X, Y) = \Omega(X, \Phi Y).$$

Из определения 2.3 следует, что $\mathrm{rad}\Omega_\Phi = \mathrm{rad}\Omega$, и ограничение формы Ω_Φ на рабочее расслоение D есть скалярное произведение в слоях расслоения D. Метрикой радикала билинейной регулярной формы Ω на многообразии M называется симметричная билинейная форма β на M такая, что $\mathrm{rad}\beta = D$, где D – рабочее расслоение для Ω, и ограничение формы β на $\mathrm{rad}\Omega$ есть скалярное произведение в слоях расслоения $\mathrm{rad}\Omega$. Теперь мы можем определить на M риманову метрику $g = \Omega_\Phi + \beta$. Для определения этой метрики нам потребовался набор объектов (Ω, D, Φ, β), где Ω – регулярная кососимметричная 2-форма на M, D – рабочее расслоение для Ω, Φ – ассоциированный с 2-формой Ω аффинор, и β – метрика радикала 2-формы Ω. Такой набор объектов называется субтвисторной структурой на многообразии M. Очевидно, что при $\mathrm{rad}\Omega = \{0\}$ $D = TM$, $\beta = 0$, и (Ω, Φ) есть твисторная структура на M. Альтернативное определение субтвисторной структуры, свойства и примеры субтвисторных структур можно найти в [5].

Для изучения вопроса существования на многообразиях субтвисторной структуры нам потребуются топологические условия, связанные с характеристическими классами. Пусть E – векторное расслоение над гладким многообразием M, $e(E)$ – класс Эйлера векторного расслоения E, и $w_1(E)$ – первый класс Штиффеля-Уитни векторного расслоения E. если на M существует глобальное всюду отличное от 0 сечение, то $e(E) = 0$. Если в слоях векторного расслоения E задана ориентация, непрерывно зависящая от точки $x \in M$, и многообразие M ориентируемо, то $w_1(E) = 0$ (см. [6]).

Пусть (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура на многообразии M, и $\Lambda^2(M)$ – расслоение кососимметричных 2-форм на M. Поскольку Ω – есть регулярная 2-форма на M, $\Omega_x \neq 0$ для всех $x \in M$, и Ω есть глобальное сечение расслоения $\Lambda^2(M)$. Поскольку любая комплексная структура в векторном пространстве D_x задает ориентацию в D_x, и Φ есть комплексная структура в слоях рабочего расслоения D, получаем:

Предложение 2.5. *Если на ориентируемом многообразии M существует субтвисторная структура с рабочим расслоением D, то $e(\Lambda^2(M)) = 0$, $w_1(D) = 0$.*

Если M – компактное ориентируемое многообразие без края, и $\chi(M)$ – его эйлерова характеристика, то $\chi(M) = \int_M e(M)$, где $e(M)$ – класс Эйлера кокосательного расслоения TM (см. [6]). Отсюда получаем:

Следствие 2.6. *Если пространство расслоения $\Lambda^2(M)$ над многообразием M есть компактное ориентируемое многообразие без края, и $\chi(\Lambda^2(M)) \neq 0$, то на M не существует субтвисторных структур.*

Теперь мы рассмотрим, как субтвисторные структуры связаны с задачей получения в произвольном многообразии кэлеровых подмногообразий.

§ 3. Субкэлеровы структуры

Пусть M – вещественное гладкое многообразие размерности $\geqslant 3$, и $(\Omega, D\Phi, \beta)$ – субтвисторная структура на M. Будем называть 2-форму Ω фундаментальной 2-формой субтвисторной структуры. В общем случае рабочее расслоение D не является голономным распределением на M. Если $d\Omega = 0$, и D есть голономное распределение на M, то в M существует подмногообразие $Q : D|_Q = TQ$, и ограничение аффинора Φ на Q есть почти комплексная структура на Q. Полагая $\Omega_\Phi(X, Y) = \Omega(X, \Phi Y)$, $X, Y \in C^1(TM)$, получаем, что $(\Omega, \Phi, \Omega_\Phi)$ есть почти кэлерова структура на подмногообразии Q.

Определение 3.1. Субкэлеровой структурой на многообразии M размерности $\geqslant 3$ называется набор объектов $(Q, \Omega, D, \Phi, \beta)$, где Ω – замкнутая регулярная кососимметричная 2-форма на M, D – рабочее расслоение для 2-формы Ω, Φ – ассоциированный с Ω аффинор, β – метрика радикала 2-формы Ω, и Q подмногообразие в M такое, что $TQ = D|_Q$, а ограничение аффинора Φ на Q есть комплексная структура на Q.

Из определения очевидно, что существование на многообразии M произвольной размерности субкэлеровой структуры влечет существование в M кэлеровых подмногообразий. Остается выяснить, при каких условиях субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой индуцирует на M субкэлерову структуру.

Определение 3.2. Тензором кручения субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) на многообразии M называется непрерывное тензорное поле N типа $(2,1)$, определенное на паре векторных полей $X, Y \in C^1(TM)$ следующим образом:

$$N(X, Y) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y],$$

где $[X, Y]$ – скобка Ли векторных полей X и Y.

Пусть N – тензор кручения субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) на многообразии M, и $d\Omega = 0$. В [5] доказано, что условие $N = 0$ влечет, что рабочее расслоение D есть голономное распределение на M, и для любого интегрального подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ ограничение аффинора Φ на Q есть комплексная структура на Q. Таким образом получаем:

Предложение 3.3. *Пусть M – вещественное многообразие размерности $n \geqslant 3$, и (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура на M с радикалом ранга $r \geqslant 1$, замкнутой фундаментальной 2-формой Ω и нулевым тензором кручения. Тогда рабочее расслоение D есть голономное распределение на M, любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ есть кэлерово подмногообразие комплексной размерности $\frac{n-r}{2}$, и $(Q, \Omega, D, \Phi, \beta)$ есть субкэлерова структура на M.*

Поскольку на двумерном вещественном многообразии любая почти комплексная структура интегрируема (см. [9; глава 9]), получаем:

Предложение 3.4. *Пусть M – вещественное многообразие размерности $n \geqslant 3$. Любая субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) на M с замкнутой фундаментальной 2-формой Ω, радикалом максимального ранга $n-2$ и инволютивным рабочим расслоением D порождает на M субкэлерову структуру $(Q, \Omega, D, \Phi, \beta)$, где Q максимальное интегральное подмногообразие для распределения D.*

Простейшим примером многообразия с субкэлеровой структурой является прямое произведение кэлерова многообразия и риманова многообразия. Нетривиальный класс примеров позволяет получить так называемая нормальная субтвисторная структура. Субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) называется нормальной, если для любых векторных полей $X \in C^1(D), Y \in C^1(TM)$ $[\Phi X, Y] = \Phi[X, Y]$.

Предложение 3.5. *Пусть M – вещественное многообразие размерности $\geqslant 3$, (Ω, D, Φ, β) – нормальная субтвисторная структура на M, и $d\Omega = 0$. Тогда рабочее расслоение D есть голономное распределение на M, любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ есть кэлерово подмногообразие в M, и множество всех гладких сечений рабочего расслоения D есть идеал в пространстве векторных полей на M.*

Доказательство. Пусть N – тензор кручения субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β). Из определения 3.2 для любых $X, Y \in C^1(D)$ имеем:

$$N(X,Y) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X,Y] = \\ = -\Phi^2[X,Y] + \Phi^2[X,Y] - \Phi^2[X,Y] + \Phi^2[X,Y] = 0.$$

С учетом свойства 1 в определении 2.3, для любых $X \in C^1(D), Y \in C^1(\mathrm{rad}\Omega)$ имеем:

$$N(X,Y) = -\Phi[\Phi X, Y] + \Phi^2[X,Y] = 0.$$

Поскольку $N|_{\mathrm{rad}\Omega} = 0$, окончательно получаем, что $N = 0$ на M. Из предложения 3.3 получаем, что рабочее расслоение D есть голономное распределение на M, и любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ есть кэлерово подмногообразие в M.

Поскольку D – голономное распределение на M, из теоремы Фробениуса следует, что D есть инволютивное распределение на M. Из определения 2.3 следует, что для любого $X \in C^1(TM)$ $\Phi X \in C^1(D)$. Для любых $X \in C^1(D), Y \in C^1(\mathrm{rad}\Omega)$ имеем:

$$[\Phi X, Y] = \Phi[X,Y] \in C^1(D).$$

Поскольку Φ есть линейный автоморфизм слоев рабочего расслоения D, и $C^1(TM) = C^1(D) \oplus C^1(\mathrm{rad}\Omega)$, получаем, что $C^1(D)$ есть идеал в $C^1(TM)$.

Замечание 3.6. Из предложения 3.5 и теоремы Фробениуса следует, что для нормальной субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) всегда существуют интегральные подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$, $R : TR = \mathrm{rad}\Omega|_R$, однако M локально изометрично $Q \times R$ только тогда, когда $[D, \mathrm{rad}\Omega] = 0$.

§ 4. Субтвисторное расслоение

Пусть V – векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ размерности $\geqslant 3$. Субтвисторной структурой с радикалом размерности r в пространстве V называется набор объектов (Ω, D, Φ, β), где Ω – кососимметричная билинейная форма на V с радикалом размерности r, D – четномерное подпространство в V такое, что ограничение формы Ω на D не вырождено, Φ – ассоциированный с формой Ω аффинор как в определении 2.3, β – симметричная билинейная форма на V такая, что $\mathrm{rad}\beta = D$ и ограничение β на $\mathrm{rad}\Omega$ есть скалярное произведение в подпространстве $\mathrm{rad}\Omega$. Под расслоением над многообразием M будем понимать многообразие P с проекцией $\pi : P \to M$, где π есть непрерывное сюрьективное отображение на все многообразие M. Из предложения 2.4 следует, что для любой константы $\lambda > 0$ 2-формы Ω и $\lambda\Omega$ в векторном пространстве

V имеют одно и то же множество ассоциированных аффиноров. Будем считать субтвисторные структуры $(\Omega_1, D_1, \Phi_1, \beta_1)$ и $(\Omega_2, D_2, \Phi_2, \beta_2)$ эквивалентными, если $\Omega_2 = \lambda\Omega_1,\ \lambda > 0,\ D_2 = D_1,\ \Phi_2 = \Phi_1,\ \beta_2 = \beta_1$.

Определение 4.1. Субтвисторным расслоением с радикалом ранга r над многообразием M называется расслоение P с проекцией $\pi : P \to M$ такое, что для любой точки $x \in M$ $\pi^{-1}(x)$ есть множество классов эквивалентности субтвисторных структур с радикалом размерности r в касательном пространстве T_xM.

Субтвисторная структура с радикалом ранга r на многообразии M есть глобальное сечение субтвисторного расслоения над M с радикалом ранга r. При $r = 0$ любой аффинор в точке $x \in M$ есть ортогональная почти комплексная структура в точке x. Отсюда следует, что классическое твисторное расслоение есть подрасслоение субтвисторного расслоения с радикалом ранга 0.

Предложение 4.2. *Пусть M – паракомпактное многообразие размерности $n \geqslant 3$. Любой слой субтвисторного расслоения с радикалом ранга $r = n - 2k$ над M изоморфен* $\mathrm{gr}^{2k} \times \mathrm{SO}(2k)/\mathrm{U}(k) \times \mathrm{SM}(r)$*, где* gr^{2k} *– $2k$-грасманиан в пространстве $\mathbb{R}^m$,* $\mathrm{SO}(2k)$ *– группа всех ортогональных матриц $2k \times 2k$ с определителем 1,* $\mathrm{U}(k)$ *– группа всех эрмитовых матриц $k \times k$,* $\mathrm{SM}(r)$ *– пространство симметричных невырожденных положительно определенных матриц $r \times r$.*

Доказательство. На паракомпактном многообразии всегда существует риманова метрика g (см. [10]). Если $(\Omega, D, , \Phi, \beta)$ – субтвисторная структура с радикалом ранга r в векторном пространстве $V = T_xM,\ x \in M$, то метрика g задает скалярное произведение $(.,.)$ в пространстве V. Выберем в V $2k$-репер u. u есть изоморфизм $\mathbb{R}^{2k} \to D$, где D – касательное подпространство в V, порожденное репером u. Пусть $\mathrm{L}(n, 2k, \mathbb{R})$ – множество всех вещественных матриц $n \times 2k$ ранга $2k$, а $\mathrm{GL}(2k, \mathbb{R})$ – множество всех невырожденных вещественных матриц $2k \times 2k$ вложенное в $\mathrm{L}(n, 2k, \mathbb{R})$. Будем считать, что матрица $a \in \mathrm{L}(n, 2k, \mathbb{R})$ действует на репер u справа. Тогда множество всех касательных подпространств размерности $2k$ в V изоморфно $\mathrm{L}(n, 2k, \mathbb{R})/\mathrm{GL}(2k, \mathbb{R}) \cong \mathrm{gr}^{2k}$.

Из определения 2.3 следует, что аффинор Φ отождествляется с ортогональной комплексной структурой в слое рабочего расслоения D. Репер u задает изоморфизм между аффинорами, ассоциированными с 2-формой Ω и ортогональными комплексными структурами в пространстве $\mathbb{R}^{2k}$: $J_D = u \circ J \circ u^{-1}$, где J_D – комплексная структура в D, J – комплексная структура в $\mathbb{R}^{2k}$. множество всех ортогональных комплексных структур в пространстве $\mathbb{R}^{2k}$ изоморфно $\mathrm{SO}(2k)/\mathrm{U}(k)$ (см. [9; глава 9]). Кроме того, так как любая метрика радикала в пространстве V может быть получена из скалярного произведения, индуцированного метрикой g с помощью симметричной невырожденной положительно определенной матрицы $r \times r$ (см. [10]), множество всех метрик радикала в V изоморфно $\mathrm{SM}(r)$.

Покажем теперь, что векторное подпространство D размерности $2k$ в V и комплексная структура J в D, ортогональная относительно метрики g, однозначно определяют класс эквивалентных кососимметричных 2-форм с радикалом ранга $r = n - 2k$. Обозначим через R ортогональное дополнение к D в

V относительно метрики g, а через Φ обозначим эндоморфизм пространства V такой, что $\Phi X = JX$, если $X \in D$, $\Phi X = 0$, если $X \in R$. Определим в пространстве V билинейную форму $\Omega(X,Y) = g(\Phi X, Y)$, $X, Y \in V$. Из свойств ортогональной комплексной структуры J и построения эндоморфизма Φ следует, что Ω есть кососимметричная 2-форма с радикалом R и рабочим подпространством D. Обратно, для любой кососимметричной 2-формы с радикалом ранга r в пространстве V существует эквивалентная 2-форма Ω такая, что ее матрица в ортонормированном относительно метрики g базисе подпространства D есть матрица комплексной структуры в D, ортогональной относительно метрики g. Здесь D однозначно выбирается как ортогональное дополнение к $\mathrm{rad}\Omega$ относительно метрики g. Таким образом получаем взаимнооднозначное соответствие между классами эквивалентности кососимметричных 2-форм с радикалом ранга r в пространстве V и парами (D, J), где D – подпространство размерности $2k = n - r$ в V, J – ортогональная относительно метрики g комплексная структура в D. Окончательно получаем, что слой субтвисторного расслоения в точке x изоморфен $\mathrm{gr}^{2k} \times \mathrm{SO}(2k)/\mathrm{U}(k) \times \mathrm{SM}(r)$.

Замечание 4.3. Из доказательства предложения 4.2 следует, что размерность слоя субтвисторного расслоения с радикалом ранга r над паракомпактным многообразием M размерности $n \geqslant 3$ равна $\frac{(n-r)^2}{4} + \frac{r}{2}(2n - r + 1)$.

Субтвисторное расслоение с радикалом ранга r над многообразием M размерности $n \geqslant 3$ называется тривиальным, если оно изоморфно $M \times \mathrm{gr}^{2k} \times \mathrm{SO}(2k)/\mathrm{U}(k) \times \mathrm{SM}(r)$, $2k = n - r$. Для тривиального субтвисторного расслоения любая субтвисторная структура в пространстве $\mathbb{R}^n$ индуцирует глобальное сечение субтвисторного расслоения на M. В силу следствия 2.6, получаем:

Предложение 4.4. *Пусть $\Lambda^2(M,r)$ – расслоение классов эквивалентности кососимметричных 2-форм с радикалом ранга r над многообразием M, где две 2-формы считаются эквивалентными, если они совпадают с точностью до умножения на положительное число, $\Lambda^2(M,r)$ – ориентируемое компактное многообразие без края, и $\chi(\Lambda^2(M,r))$ – эйлерова характеристика этого многообразия. Если субтвисторное расслоение с радикалом ранга r над M тривиально, то $\chi(\Lambda^2(M,r)) = 0$.*

Предложение 4.5. *Пусть M – паракомпактное многообразие размерности $n \geqslant 3$, и P^r – субтвисторное расслоение с радикалом ранга $r = n - 2k$ над M. Если на M существует глобальный $2k$-репер (корепер), то расслоение P^r тривиально.*

Доказательство. Так как на паракомпактном многообразии всегда существует риманова метрика, и риманова метрика задает изоморфизм между $2k$-реперами и $2k$-кореперами, достаточно предположить, что на M задан глобальный $2k$-репер u. Репер u в каждой точке $x \in M$ единственным образом определяет касательное $2k$-мерное подпространство D_x и является изоморфизмом между D_x и $\mathbb{R}^{2k}$ (см. [9]). Также как в доказательстве предложения 4.2 отождествим множество всех касательных подпространств размерности $2k$ в T_xM с пространством $\mathrm{L}(n, 2k, \mathbb{R})/\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cong \mathrm{gr}^{2k}$. Обозначим через $D_x a$ касательное подпространство в T_xM, порожденное репером

ua, $a \in \mathrm{L}(n, 2k, \mathbb{R})/\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Пусть J – комплексная структура в $\mathbb{R}^{2k}$, и $J(ua) = ua \circ J \circ (ua)^{-1}$. Тогда $J(ua)$ есть комплексная структура в $D_x a$, и u индуцирует изоморфизм между множеством комплексных структур в пространстве $D_x a$ и пространством $\mathrm{SO}(2k)/\mathrm{U}(k)$. Из доказательства предложения 4.2 следует, что риманова метрика g на M определяет изоморфизм между множеством метрик радикала в точке x и пространством $\mathrm{SM}(r)$. Поскольку отображения u и g непрерывно зависят от точки x и определены глобально на M, получаем, что субтвисторное расслоение P^r тривиально.

Многообразие M называется параллелезуемым, если на M существует глобальный n-репер, где $n = \dim(M)$. Этот репер позволяет ввести на M естественную риманову метрику. Теперь из предложения 4.5 получаем:

Следствие 4.6. *Пусть M – параллелезуемое многообразие размерности $\geqslant 3$. Тогда субтвисторное расслоение с радикалом любого допустимого ранга над M тривиально.*

Замечание 4.7. Если многообразие P есть тривиальное векторное расслоение ранга $m \geqslant 3$, то на P всегда существует субтвисторная структура, индуцируемая субтвисторной структурой в пространстве $\mathbb{R}^m$. Однако, субтвисторное расслоение над P может быть нетривиальным.

Очевидно, что на многообразии с тривиальным субтвисторным расслоением ранга r всегда существует субтвисторная структура с радикалом ранга r как стандартное сечение субтвисторного расслоения. Далее мы рассмотрим пример многообразия, на котором не существует субтвисторных структур, а субтвисторное расслоение не является тривиальным.

§ 5. Субтвисторное расслоение над четырехмерной сферой

Пусть S^4 – четырехмерная сфера вложенная в пространство $\mathbb{R}^5$. S^4 есть компактное ориентируемое многообразие без края с римановой метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}^5$. Известно, что классическое твисторное расслоение над S^4 есть комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^3$ со слоем $\mathbb{C}P^1$ (см. [8]). Здесь мы опишем самый общий случай субтвисторного расслоения с радикалом любого ранга. Из теоремы 2.2 следует, что субтвисторное расслоение над S^4 может иметь только радикал либо ранга 0, либо ранга 2. Множество всех метрик радикала на римановом многообразии можно отождествить с пространством симметричных невырожденных положительно определенных матриц $r \times r$, где r – ранг радикала. В силу предложения 4.2, остается описать расслоение $\mathrm{gr}^{2k}(S^4) \times \mathcal{J}(\mathrm{gr}^{2k}(S^4))$, где $\mathrm{gr}^{2k}(S^4)$ – расслоение касательных подпространств размерности $2k$ над S^4, $\mathcal{J}(\mathrm{gr}^{2k}(S^4))$ – расслоение ортогональных комплексных структур в слоях расслоения $\mathrm{gr}^{2k}(S^4)$, $2k = 4 - r$.

Комплексное пространство $\mathbb{C}^4$ можно отождествить с кватернионным пространством $\mathbb{H}^2$, считая $q_1 = z_1 + z_2 j$, $q_2 = z_3 + z_4 j$, $j = \sqrt{-1}$. Введем на $\mathbb{H}^2 \setminus \{0\}$ две функции:

$$f(q_1, q_2) = 2\,\frac{q_1 \bar{q}_2}{|q_1|^2 + |q_2|^2},$$
$$h(q_1, q_2) = \frac{|q_1|^2 - |q_2|^2}{|q_1|^2 + |q_2|^2}.$$

Функции f и h удовлетворяют свойству $|f(q_1,q_2)|^2+|h(q_1,q_2)|^2=1$. Также эти функции инвариантны относительно умножения (q_1,q_2) на ненулевой кватернион. Введем проекцию $\pi:\mathbb{H}^2\setminus\{0\}\to S^4$: $\pi(q_1,q_2)=(f(q_1,q_2),h(q_1,q_2))\in\mathbb{R}^5$. Пусть группа $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ действует на $\mathbb{H}^2$ гомотетиями. Тогда $\mathbb{C}P^3$ есть $(\mathbb{H}^2\setminus\{0\})/\mathbb{C}^*$. Так как проекция π $\mathbb{C}^*$-инвариантна, π есть проекция $\mathbb{C}P^3\to S^4$. Каждый ненулевой кватернион q порождает комплексную прямую в $\mathbb{C}^2$. Если $q\neq 0$, то $\pi(qq_1,qq_2)=\pi(q_1,q_2)$. Отсюда, слой расслоения $\mathbb{C}P^3\to S^4$ есть $(\mathbb{H}\setminus\{0\})/\mathbb{C}^*\cong\mathbb{C}P^1\cong S^2$.

Пусть $z=(q_1,q_2)\in\mathbb{C}P^3$, $x=\pi(q_1,q_2)\in S^4$, h – метрика Фубини-Штуди на $\mathbb{C}P^3$ (см. [10]), и J_0 – комплексная структура на $\mathbb{C}P^3$, индуцированная умножением на мнимую единицу. Обозначим через D_z ортогональное дополнение к $T_z\mathbb{C}P^1$ в $T_z\mathbb{C}P^3$ относительно метрики h. Тогда $T_z\mathbb{C}P^3=D_z\oplus T_z\mathbb{C}P^1$. Поскольку комплексная структура J_0 ортогональна и инвариантно действует на $T_z\mathbb{C}P^1\cong\mathbb{C}$, ограничение J_0 на D_z есть комплексная структура в пространстве D_z. Обозначим ограничение J_0 на D_z через I_z. Эта комплексная структура определяет комплексную структуру $J_z=d\Pi\circ I_z d\pi^{-1}$ в касательном пространстве T_xS^4. Заметим, что комплексная структура J_z ортогональна относительно римановой метрики на S^4, индуцированной метрикой h на $\mathbb{C}P^3$, и сохраняет ориентацию в T_xS^4, поскольку I_z сохраняет ориентацию в D_z. Аналогично, комплексная структура $-J_0$ определяет ортогональную комплексную структуру $-J_z$ в T_xS^4, меняющую ориентацию в T_xS^4. Таким образом, каждой точке $z=(q_1,q_2)\in\mathbb{C}P^3$ можно непрерывным образом сопоставить точку $x=\pi(q_1,q_2)\in S^4$ и пару ортогональных комплексных структур в касательном пространстве T_xS^4.

Пусть $\mathbb{H}P^1$ – множество всех кватернионных прямых в пространстве $\mathbb{H}^2$. $\mathbb{H}P^1$ есть компактное ориентируемое многообразие без края, диффеоморфное S^7/S^3. Поскольку $\mathrm{gr}^4(S^4)\cong S^4$, а $S^4\cong\mathbb{H}P^1$, получаем:

Предложение 5.1. *Субтвисторное расслоение с радикалом ранга 0 над четырехмерной сферой изоморфно* $\mathbb{H}P^1\times\mathbb{C}P^3\times\mathbf{z}_2$.

Пусть $\Lambda^2(S^4,0)$ – расслоение классов эквивалентности кососимметричных 2-форм с радикалом ранга 0 над S^4 как в предложении 4.4, и $\chi(M)$ – эйлерова характеристика многообразия M. Поскольку $\chi(\mathbb{H}P^1)=3$, $\chi(\mathbb{C}P^3)=4$, $\chi(\mathbf{z}_2)=2$. Получаем:

$$\chi(\Lambda^2(S^4,0))=\chi(\mathbb{H}P^1)\chi(\mathbb{C}P^3)\chi(\mathbf{z}_2)=24.$$

Из предложения 4.4 получаем, что субтвисторное расслоение с радикалом ранга 0 не тривиально. Кроме того, из следствия 2.6 получаем:

Следствие 5.2. *На четырехмерной сфере не существует субтвисторных структур с радикалом ранга 0.*

Замечание 5.3. Поскольку любая почти комплексная структура на римановом многообразии M является ортогональной относительно некоторой римановой метрики, и каждая ортогональная почти комплексная структура на M вместе с римановой метрикой индуцирует на M субтвисторную структуру с радикалом ранга 0 (см. раздел 2), из следствия 5.2 вытекает, что на четырехмерной сфере не существует почти комплексных структур.

Рассмотрим вложение $\mathbb{C}P^2$ в $\mathbb{C}P^3$, считая, что в паре $(q_1, q_2) \in \mathbb{C}P^3$ $q_2 = z_2 \in \mathbb{C}$. Имеем: $(qq_1, qz_2) \in \mathbb{C}P^2$ только когда $qz_2 \in \mathbb{C}$. Это возможно только когда q есть ненулевое комплексное число. Заметим, что $\Pi(-q_1 i, z_2) = \pi(q_1, iz_2)$, $i = \sqrt{-1}$, а точки $(-q_1 i, z_2)$, (q_1, iz_2) не лежат на одной комплексной прямой, так как $-q_1 i \neq -iq_1$. Получаем, что слой при ограничении проекции π на $\mathbb{C}P^2$ есть $\mathbf{z}_2$. Всякое расслоение со слоем $\mathbf{z}_2$ есть двулистное накрытие. Получаем, что $\mathbb{C}P^2$ двулистно накрывает S^4. Пусть $z = (q_1, z_2) \in \mathbb{C}P^2$, J_z – комплексная структура в $T_z\mathbb{C}P^2$, индуцированная умножением на мнимую единицу, и L_z – комплексная прямая в $T_z\mathbb{C}P^2 \cong \mathbb{C}^2$. Поскольку J_z есть ортогональная относительно метрики Фубини-Штуди на $\mathbb{C}P^2$ комплексная структура, и комплексная прямая L_z инвариантна относительно умножения на мнимую единицу, ограничение комплексной структуры J_z на L_z есть ортогональная комплексная структура в L_z, сохраняющая ориентацию в L_z. Поскольку в $\mathbb{R}^2$ существует единственная ортогональная, сохраняющая ориентацию, комплексная структура, и ограничение комплексной структуры $-J_z$ на L_z есть единственная ортогональная, меняющая ориентацию, комплексная структура в L_z, получаем, что каждая точка $z \in \mathbb{C}P^2$ определяет ровно две ортогональные комплексные структуры в пространстве L_z. Так как $d\pi L_z$ есть двумерное касательное подпространство в T_xS^4, $x = \pi(z) \in S^4$, и в T_xS^4 существует только две ортогональные комплексные структуры $\pm J_x = d\pi \circ \pm J_z \circ d\pi^{-1}$, получаем:

Предложение 5.4. *Субтвисторное расслоение с радикалом ранга 2 над четырехмерной сферой изоморфно* $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2 \times \mathrm{SM}(2)$.

Пусть $\Lambda^2(S^4, 2)$ – расслоение классов эквивалентности кососимметричных 2-форм с радикалом ранга 2 над S^4 как в предложении 4.4. Из предложения 5.4 и предложения 4.2 следует, что $\Lambda^2(S^4, 2) \cong \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$. Имеем:

$$\chi(\Lambda^2(S^4, 2)) = \chi(\mathbb{C}P^1)\chi(\mathbb{C}P^2) = 6.$$

Из предложения 4.4 получаем, что субтвисторное расслоение с радикалом ранга 2 не тривиально. Кроме того, из следствия 2.6 получаем:

Следствие 5.5. *На четырехмерной сфере не существует субтвисторных структур с радикалом ранга 2.*

Мы описали все возможные типы субтвисторного расслоения над S^4. Заметим, что S^4 является однородным пространством, на котором не существует субтвисторных структур. Далее рассмотрим условия, при которых на однородном пространстве могут существовать инвариантные субтвисторные структуры.

§ 6. Инвариантные субтвисторные структуры на однородных пространствах

Пусть $M = G/H$ – однородное пространство размерности $\geqslant 3$, где G – группа Ли, транзитивно и эффективно действующая на многообразии M, H – подгруппа изотропии начальной точки $o \in M$. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы Ли G, а $\mathfrak{h}$ – подалгебра изотропии в $\mathfrak{g}$. В $\mathfrak{g}$ можно выбрать дополнительное подпространство $\mathfrak{m} : \mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$. Подпространство $\mathfrak{m}$ изоморфно касательному пространству

T_oM. Пусть π – проекция $G \to M$. Тогда $\tau = d\pi_e$, где e – единица группы G, есть изоморфизм $\mathfrak{m} \to T_oM$. Субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) на однородном пространстве M называется G-инвариантной, если D есть G-инвариантное распределение касательных подпространств на M, и для любого $g \in G$ $\Omega_o = \Omega_x \circ dg$, $\beta_o = \beta_x \circ dg$, $\Phi_x \circ dg = dg \circ \Phi_o$, здесь $x = g(o)$, dg – дифференциал отображения $g : M \to M$. Субтвисторная структура на группе Ли G называется левоинвариантной (правоинвариантной), если она инвариантна относительно левых (правых) сдвигов на элементы группы G. Левоинвариантная (правоинвариантная) субтвисторная структура на группе Ли G называется изотропновырожденной, если ее радикал содержит подалгебру изотропии $\mathfrak{h}$. В [5] доказано, что множество всех G-инвариантных субтвисторных структур на однородном пространстве $M = G/H$ находится во взаимнооднозначном соответствии со множеством всех G-левоинвариантных H-правоинвариантных изотропновырожденных субтвисторных структур на группе Ли G. Таким образом, существование на группе Ли G G-левоинвариантной H-правоинвариантной изотропновырожденной субтвисторной структуры с радикалом ранга r влечет существование G-инвариантной субтвисторной структуры с радикалом ранга r на M и обратно. Из определения G-инвариантной субтвисторной структуры следует, что такая субтвисторная структура полностью определяется своим значением в начальной точке o. Из предложения 4.2 получаем:

Предложение 6.1. *Пусть $M = G/H$ – однородное пространство размерности $n \geqslant 3$. Множество всех G-инвариантных субтвисторных структур с радикалом ранга $r = n - 2k$ на M изоморфно $\mathrm{gr}^{2k} \times \mathrm{SO}(2k)/\mathrm{U}(k) \times \mathrm{SM}(r)$, где gr^{2k} – $2k$-грасманиан в пространстве $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{SM}(r)$ – множество симметричных невырожденных положительно определенных матриц $r \times r$.*

Из этого предложения следует, что субтвисторное подрасслоение G-инвариантных субтвисторных структур над однородным пространством всегда тривиально, даже если само субтвисторное расслоение не тривиально. Однако подрасслоение G-инвариантных субтвисторных структур над однородным пространством может быть пустым.

Теорема 6.2. *Пусть $M = G/H$ – однородное пространство размерности $\geqslant 3$. Если представление изотропии действует на T_oM неприводимо, то на M не существует G-инвариантных субтвисторных структур с нетривиальным радикалом.*

Доказательство. Предположим, что на M существует G-инвариантная субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) с нетривиальным радикалом. Поскольку рабочее расслоение D есть G-инвариантное распределение на M, и для любого $h \in H$ dh есть автоморфизм касательного пространства T_oM, получаем, что dh есть автоморфизм подпространства D_o для всех $h \in H$. Таким образом D_o есть нетривиальное инвариантное подпространство для действия изотропии, что противоречит неприводимости действия изотропии на T_oM.

Замечание 6.3. Из теоремы 2.2 следует, что на однородном пространстве G/H нечетной размерности не существует G-инвариантных кососимметричных 2-форм с тривиальным радикалом. С учетом теоремы 6.2 получаем, что на однородном пространстве нечетной размерности с неприводимым действием представления изотропии не существует инвариантных субтвисторных структур.

Хорошо известно, что на сфере S^n не существует симплектических структур при $n \geqslant 3$ (см. [7]). Сейчас мы получим обобщение этого факта для любых субтвисторных структур с замкнутой фундаментальной 2-формой.

Теорема 6.4. *На сфере S^n, $n \geqslant 3$ не существует субтвисторных структур с замкнутой фундаментальной 2-формой, а следовательно не существует субкэлеровых структур.*

Доказательство. Сферу S^n всегда можно представить как однородное риманово пространство G/H с неприводимым действием изотропии (см. [10]). Предположим, что на S^n существует субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) : $d\Omega = 0$. Значение этой субтвисторной структуры в начальной точке o индуцирует левоинвариантную изотропновырожденную субтвисторную структуру $(\Omega_o \circ \tau, \tau^{-1}(D_o), \tau^{-1} \circ \Phi_o \circ \tau, \beta \circ \tau)$ на группе Ли G. Так как подгруппа изотропии риманова однородного пространства всегда является компактной, применяя к этой субтвисторной структуре операцию усреднения (интегрирования относительно унимодулярной меры) по подгруппе H, получаем G-левоинвариантную H-правоинвариантную изотропновырожденную субтвисторную структуру на группе Ли G с радикалом ранга не меньше ранга $\mathrm{rad}\Omega$. Полученная таким образом субтвисторная структура на группе Ли G индуцирует G-инвариантную субтвисторную структуру на M с замкнутой фундаментальной 2-формой Ω'. Поскольку сфера S^n имеет нулевую группу вторых когомологий $H^2(S^n, \mathbf{z})$, на S^n существует ненулевая G-инвариантная 1-форма α' : $d\alpha' = \Omega'$. С другой стороны в [4] доказано, что на сфере S^n, $n \geqslant 2$ не существует ненулевых G-инвариантных 1-форм. Полученное противоречие доказывает, что на сфере S^n не существует субтвисторных структур с замкнутой фундаментальной 2-формой.

Поскольку сфера S^n есть однородное пространство с неприводимым действием подгруппы изотропии (см. [10]), из теоремы 6.2 получаем:

Следствие 6.5. *На сфере S^n, $n \geqslant 3$ не существует инвариантных субтвисторных структур с нетривиальным радикалом.*

Если подгруппа изотропии H однородного пространства $M = G/H$ есть нормальная подгруппа в G, то G/H есть фактор-группа Ли. Поскольку любая группа Ли является параллелезуемым многообразием, из предложения 4.5 получаем класс однородных многообразий, допускающих G-инвариантную субтвисторную структуру:

Следствие 6.6. *Пусть $M = G/H$ – однородное пространство размерности $n \geqslant 3$, и H есть нормальная подгруппа в G. Тогда субтвисторное расслоение над M тривиально, и любая субтвисторная структура в $\mathbb{R}^n$ порождает G-инвариантную субтвисторную структуру на M.*

Пусть X – векторное поле на однородном пространстве $M = G/H$. Будем называть векторное поле X эквивариантным, если для всех $g \in G$ $dg^{-1}X(g(o)) =$

$X(o)$. Заметим, что отображение τ есть гомоморфизм скобки ли элементов из подпространства $\mathfrak{m}$ и скобки Ли эквивариантных векторных полей на M. Пусть $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ – первый производный идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Предложение 6.7. *Пусть $M = G/H$ – однородное риманово пространство размерности $\geqslant 3$, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет нетривиальный центр $\mathfrak{c}$, и $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{c} \cap \mathfrak{g}' \neq \{0\}$. Тогда любой элемент из $\mathfrak{p}$ порождает G-инвариантную субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой на M.*

Доказательство. Для однородного риманова пространства $M = G/H$ группа G есть группа изометрий римановой метрики B на M, то есть метрика B есть G-инвариантная билинейная форма. Пусть ξ – эквивариантное векторное поле на M. Это векторное поле порождает на M ненулевую 1-форму $\alpha : \alpha(X) = B(\xi, X)$, $X \in C^1(TM)$. Пусть $x = g(o)$, $g \in G$. Для любого векторного поля X на M Имеем:

$$\alpha_x(dgX) = B_x(\xi, dgX) = B_o(dg^{-1}\xi, X) = B_o(\xi, X) = \alpha_o(X),$$

то есть 1-форма α G-инвариантна. Тогда $d\alpha$ есть G-инвариантная кососимметричная замкнутая 2-форма на M. Если $\tau^{-1}(\xi) \in \mathfrak{g}' \setminus \{0\}$, то существуют $X, Y \in \mathfrak{g} : \tau^{-1}(\xi) = [X, Y]$. Тогда:

$$2\, d\alpha(\tau X, \tau Y) = -\alpha([\tau X, \tau Y]) = -B(\xi, \tau[X, Y]) = -B(\xi, \xi) \neq 0,$$

то есть $d\alpha \not\equiv 0$.

Пусть D – ортогональное дополнение к $\mathrm{rad}(d\alpha)$ относительно метрики B. в [4] доказано, что такое рабочее расслоение есть G-инвариантное распределение на M. Любая ортогональная относительно метрики B комплексная структура J в слоях расслоения D такая, что для любых $X, Y \in C^1(D)$ $d\alpha(X, Y) = B(JX, Y)$ порождает G-инвариантный аффинор Φ, ассоциированный с 2-формой $d\alpha$. Мы получили G-инвариантную субтвисторную структуру $(d\alpha, D, \Phi, \beta)$, где β – метрика радикала, полученная ограничением метрики B на $\mathrm{rad}(d\alpha)$. Остается доказать, что каждый ненулевой элемент из $\mathfrak{p}$ порождает эквивариантное векторное поле на M.

Пусть $X \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$, и G_t – однопараметрическая подгруппа, порожденная элементом X. Обозначим через X^* векторное поле на M такое, что для любой точки $x \in M$ $X^*(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} G_t(x)$. Поскольку G_t лежит в центре группы G, для любого $g \in G$ имеем:

$$dg^{-1}X^*(g(o)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} g^{-1}G_t g(o) = \frac{d}{dt}|_{t=0} G_t(o) = X^*(o).$$

Таким образом, X^* есть эквивариантное векторное поле на M, которое порождает G-инвариантную незамкнутую 1-форму на M.

Предложение 6.7 позволяет получить класс однородных пространств с инвариантной субтвисторной структурой. Так как любая нильпотентная группа Ли имеет нетривиальный центр, а для любой компактной подгруппы H можно построить H-биинвариантную риманову метрику (см. [10]), для однородного пространства $M = G/H$, где G – нильпотентная группа Ли, H –собственная компактная подгруппа в G, трансверсальная центру группы G, всегда можно построить G-инвариантную субтвисторную структуру с точной фундаментальной 2-формой. Кроме того, инвариантную субтвисторную структуру с точной фундаментальной 2-формой на однородном пространстве сразу можно получить из инвариантной аффинорной метрической структуры, когда вместо фундаментальной 2-формы рассматривается 1-форма. такие структуры изучены в [4]. Заметим, что если однородное пространство $M = G/H$ допускает G-инвариантную субтвисторную структуру, и M есть компактное многообразие без края, то эта субтвисторная структура имеет радикал ненулевого ранга, поскольку любая точная кососимметричная 2-форма на компактном ориентируемом многообразии без края всегда вырождена. Также из теоремы 2.2 следует, что если однородное пространство нечетной размерности допускает инвариантную субтвисторную структуру, то эта структура имеет радикал размерности $\geqslant 1$. Простым примером группы Ли с левоинвариантной субтвисторной структурой, имеющей замкнутую фундаментальную 2-форму и нетривиальный радикал, является полупрямое произведение симплектической группы Ли на коммутативную группу Ли.

Замечание 6.8. Если группа Ли G содержит собственную подгруппу H четной коразмерности и допускает G-левоинвариантную H-правоинвариантную субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой и радикалом совпадающим с подалгеброй изотропии $\mathfrak{h}$, эта субтвисторная структура индуцирует G-инвариантную почти кэлерову структуру на однородном пространстве $M = G/H$. В случае, когда тензор кручения этой субтвисторной структуры равен 0, она индуцирует G-инвариантную кэлерову структуру на M.

Список литературы

[1] Chu B.-Y., “Symplectic Homogeneous Spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **197** (1974), 145–159.

[2] Корнев Е. С., “Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **53**:1 (2012), 107–123.

[3] Корнев Е. С., “Аффинорные структуры на векторных расслоениях”, *Сиб. матем. журн.*, **55**:6 (2014), 1283–1296.

[4] Корнев Е. С., Славолюбова Я. В., “Инвариантные аффинорные и субкэлеровы структуры на однородных пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:1 (2016), 67–84.

[5] Корнев Е. С., “Субкомплексные и субкэлеровы структуры”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:5 (2016), 1062–1077.

[6] Милнор Дж., Сташеф Дж., *Характеристические классы*, Мир, Москва, 1979.

[7] Фоменко А. Т., *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*, МГУ, Москва, 1988.

[8] Сергеев А. Г., *Гармонические отображения. Лекционные курсы НОЦ, вып.10*, МИАН, Москва, 2008.

[9] Кобаяси Ш., Номидзу К., *Основы дифференциальной геометрии (В 2 т.)*, Наука, Москва, 1981.

[10] Бессе А., *Многообразия Эйнштейна (В 2 т.)*, Мир, Москва, 1990.

Е. С. Корнев (E. S. Kornev)
Кемеровский государственный университет
E-mail: q148@mail.ru