УДК 514.576

Твисторные расслоения на сфере S^4

Корнев Евгений Сергеевич

Рассмотрим четырехмерную сферу S^4 в пространстве $\mathbb{R}^5$ и обозначим через g_0 каноническую метрику на S^4, индуцированную из $\mathbb{R}^5$. Множество ортогональных относительно метрики g_0 почти комплексных структур - это множество всех почти комплексных структур, сохраняющих данную метрику.

Сфера S^4 является компактным ориентируемым римановым многообразием. Пусть S^2 - двумерная сфера в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных a,b,c. Каждая точка $(a,b,c)\in S^2$ в фиксированном базисе касательного пространства к сфере S^4 в точке x определяет две почти комплексные структуры в точке x:

$$J^+=\begin{pmatrix}0 & a & b & c\\ -a & 0 & c & -b\\ -b & -c & 0 & a\\ -c & b & -a & 0\end{pmatrix},$$

и

$$J^-=\begin{pmatrix}0 & a & b & c\\ -a & 0 & -c & b\\ -b & c & 0 & -a\\ -c & -b & a & 0\end{pmatrix}.$$

Обе эти почти комплексные структуры сохраняют метрику g_0, причем J^+ сохраняет ориентацию на S^4, а J^- меняет ориентацию.

Твисторным расслоением называется расслоение (P,π,M), где M - риманово многообразие четной размерности с метрикой g, π - проекция $P\mapsto M$, а P - дифференцируемое многообразие такое, что каждая точка u из P является ортогональной относительно метрики g почти комплексной структурой в $T_xM,\ x=\pi(u)$, сохраняющей ориентацию на M. Слоем твисторного расслоения над точкой x является множество всех ортогональных почти комплексных структур в пространстве T_xM согласованных с выбранной ориентацией на M. Глобальное сечение твисторного расслоения называется ортогональной почти комплексной структурой на многообразии M.

Пусть g - произвольная риманова метрика на S^4. В каждой точке $x\in S^4$ существует невырожденное линейное преобразование A_x касательного пространства в точке x такое, что $a^*g_0=g$. Если J - почти комплексная структура, сохраняющая метрику g, то для любых X и Y из T_xS^4 имеем:

$$g_0(AX,AY)=g(X,Y)=g_0(A\circ JX,A\circ JY)=g_0(J_A\circ AX,J_A\circ AY),$$

где $J_A=A\circ J\circ A^{-1}$. Таким образом, отображение A индуцирует взаимнооднозначное соответствие между множествами почти комплексных структур, ортогональных относительно метрик g_0 и g соответственно.

Поскольку множество согласованных с ориентацией ортогональных почти комплексных структур в каждой точке сферы S^4 диффеоморфно сфере S^2, а $S^2 \cong \mathbb{CP}^1$, то множество сохраняющих ориентацию ортогональных почти комплексных структур в $T_x S^4$ изоморфно пространству $\mathbb{CP}^1$, и слоем твисторного расслоения в точке x можно считать $\mathbb{CP}^1$.

Теперь каждую согласованную с ориентацией ортогональную почти комплексную структуру в точке сферы S^4 можно отождествить с парой (x,z), где $x \in S^4, z \in \mathbb{CP}^1$. Однако тривиальное расслоение $S^4 \times \mathbb{CP}^1$ не является твисторным. Действительно, если расслоение $S^4 \times \mathbb{CP}^1$ является твисторным, то, поскольку оно допускает глобальное сечение, это сечение задает ортогональную почти комплексную структуру на S^4. Но известно, что сфера S^4 не допускает почти комплексных структур.

Рассмотрим пространство $\mathbb{HCP}^1$ всех комплексных прямых в кватернионном пространстве $\mathbb{H}^2$. Каждый кватернион $q = t + xi + yj + zk$ можно отождествить с парой комплексных чисел $(t+ix, y+iz)$. Такое отождествление задает взаимнооднозначное соответствие между пространствами $\mathbb{CP}^3$ и $\mathbb{HCP}^1$. А именно каждой прямой в $\mathbb{C}^4$ с направляющим вектором (z_1, z_2, z_3, z_4) сопоставляется комплексная прямая в $\mathbb{H}^2$ с направляющим вектором $(q_1, q_2), q_1 = z_1 + z_2 j, q_2 = z_3 + z_4 j$. В дальнейшем будем отождествлять комплексную прямую из $\mathbb{HCP}^1$ с ее направляющим вектором (q_1, q_2).

Пространство $\mathbb{CP}^1$ можно рассматривать как пространство ненулевых кватернионов, профакторизованное относительно умножения на ненулевые комплексные числа. Будем обозначать класс эквивалентности кватерниона q через $[q]$ и отождествлять его с элементом из $\mathbb{CP}^1$.

Определим действие $\mathbb{CP}^1$ на $\mathbb{CP}^3$ следующим образом:

$$[q](q_1,q_2) = (q_1 q, q_2 q), (q_1, q_2) \in \mathbb{HCP}^1.$$

Зададим проекцию $\pi : \mathbb{CP}^3 \to \mathbb{R}^5$ следующим образом:

$$\pi(q_1,q_2) = (2\frac{q_1\overline{q}_2}{|q_1|^2 + |q_2|^2}, \frac{|q_1|^2 - |q_2|^2}{|q_1|^2 + |q_2|^2}),$$

считая, что каждый кватернион определяет точку вещественного пространства $\mathbb{R}^4$, а $\overline{q} = t - ix - jy - kz$ если $q = t + ix + jy + kz$. Прямое вычисление показывает, что норма элемента $\pi(q_1,q_2)$ равна 1. Следовательно, образом пространства $\mathbb{CP}^3$ при этой проекции является сфера S^4. Если q - ненулевой кватернион, то

$$\pi(qq_1, qq_2) = \pi(q_1, q_2).$$

Относительно введенного действия $\mathbb{CP}^1$ на $\mathbb{CP}^3$, слоем над точкой сферы S^4 является пространство $\mathbb{CP}^1$.

Введем открытые множества $U_1 = \{(q_1,q_2) \in \mathbb{C}P^3 : q_1 \neq 0\}$ и $U_2 = \{(q_1,q_2) \in \mathbb{C}P^3 : q_2 \neq 0\}$. Отображения

$$\phi_1(q_1,q_2) = (\pi(q_2 / q_1, 1), [q_1])$$

И

$$\phi_2(q_1,q_2) = (q_1 / q_2, 1), [q_2])$$

Задают локальные диффеоморфизмы $U_1 \mapsto \pi(U_1 \times \mathbb{CP}^1$ и $U_2 \mapsto \pi(U_2) \times \mathbb{CP}^1$ соответственно. Таким образом, $\mathbb{CP}^3$ является расслоением над S^4 со слоем $\mathbb{CP}^1$.

Сфера S^4 изометрична кватернионному проективному пространству $\mathbb{HP}^1$ с метрикой

$$h(q,q) = \mathrm{Re}(q\overline{q}).$$

Касательное пространство в точке $u \in \mathbb{HP}^1$ изоморфно кватернионному пространству $\mathbb{H}$. Известно (см. [3], том 1), что группа всех ортогональных преобразований пространства $\mathbb{H}$ состоит из отображений вида:

$$f(x) = pxq, |p| = |q| = 1,$$

и изоморфна $SO(4)$. Обозначим через W множество кватернионных преобразований вида:

$$J_q(x) = xq, q = ai + bj + ck, a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Каждое такое преобразование сохраняет метрику h и ориентацию пространства $\mathbb{H}$. Кроме того, $J_q \circ J_q = -id$. Заметим, что преобразование $J_q(x) = qx$ также сохраняет метрику h, но меняет ориентацию пространства $\mathbb{H}$. Группа $U(2)$ изоморфна $SU(2) \times U(1)$, а следовательно диффеоморфна $S^3 \times S^1$. Отсюда следует, что множество отображений вида:

$$f_q(x) = px \exp(i\varphi) q, |p| = |q| = 1, q = ai + bj + ck = \mathrm{Const}$$

диффеоморфно $U(2)$, а множество W диффеоморфно $SU(4)/U(2)$, т. е. является множеством ортогональных, сохраняющих ориентацию, почти комплексных структур (подробнее см. [2], том 2, глава 9). Получаем, что множество всех ортогональных, сохраняющих ориентацию, почти комплексных структур в $T_u\mathbb{HP}^1$ параметризуется кватернионами вида $q = ai + bj + ck, a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Каждой комплексной прямой (q_1, q_2) из $\mathbb{CP}^3$ можно сопоставить кватернионную прямую из $\mathbb{HP}^1$ с направляющим вектором (q_1, q_2). Каждый элемент $[q], q = z_1 + z_2 j$ слоя $\pi^{-1}(q_1, q_2)$ определяет ортогональную, сохраняющую ориентацию на $\mathbb{HP}^1$, почти комплексную структуру

$$J_q^+ : q = \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1/z_2)i + \mathrm{Im}(z_1/z_2)j + \dfrac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}k \mid z_2 \neq 0, \\ k \mid z_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем, что $\mathbb{CP}^3$ является твисторным расслоением над $\mathbb{HP}^1$, а, следовательно, и над S^4.

Каждый элемент (q_1, q_2) кватернионного пространства $\mathbb{H}^2$ такой, что $|q_1|^2 + |q_2|^2 = 1$ можно отождествить с точкой единичной сферы S^7 в пространстве $\mathbb{R}^8$. Если $z = \exp(ix), x \in \mathbb{R}$, то элементы $(q_1 z, q_2 z)$ и (q_1, q_2) определяют одну и ту же комплексную прямую в пространстве $\mathbb{CP}^3$. Отсюда получаем, что пространство $\mathbb{CP}^3$ диффеоморфно однородному пространству S^7/S^1. Поскольку сфера S^7 односвязна, а окружность S^1 связна, пространство S^7/S^1 является компактным и односвязным. Следовательно, $\mathbb{CP}^3$ является компактным и односвязным.

На $\mathbb{CP}^3$ существует естественная комплексная структура $J_0 : J_0 X = iX$ и каноническая метрика Фубини-Штуди h_0, относительно которой комплексная структура J_0 является ортогональной. Это превращает твисторное расслоение $\mathbb{CP}^3$ в эрмитово многообразие. Обозначим через D_u подпространство, ортогональное касательному пространству к слою $\mathbb{CP}^1$ твисторного расслоения над сферой S^4 относительно метрики h_0 в каждой точке $u \in \mathbb{CP}^3$. Касательное пространство $T_u\mathbb{CP}^3$ раскладывается в ортогональную сумму $D_u \otimes T_u\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}$. Отсюда, любая ортогональная почти комплексная структура на $\mathbb{CP}^3$, инвариантно действующая на касательном пространстве к слою $\mathbb{CP}^1$, в точке u действует инвариантно на D_u.

На слое $\mathbb{CP}^1$ существует единственная, с точностью до знака ортогональная комплексная структура $J : JX = \pm iX$. Поскольку дифференциал проекции π задает изоморфизм подпространства D_u на $T_x S^4, x = \pi(u)$, то множество ортогональных, инвариантно действующих на слоях твисторного расслоения почти комплексных структур в каждой точке u из $\mathbb{CP}^3$ полностью определяется пространством ортогональных почти комплексных структур в точке $\pi(u)$ сферы S^4. Как было показано выше, каждый кватернион $q = ai + bj + ck, a^2 + b^2 + c^2 = 1$ определяет две ортогональных почти комплексных структуры в точке x сферы S^4, одна из которых сохраняет, а другая меняет ориентацию касательного пространства $T_x S^4$. Поскольку любое векторное поле X на $\mathbb{CP}^3$ в любой точке u можно разложить в сумму $X = Y + Z, Y \in D_u, Z \in T_u\mathbb{CP}^1$, то любая ортогональная, инвариантно действующая на слоях твисторного расслоения почти комплексная структура на $\mathbb{CP}^3$ имеет либо вид:

$$J^+ : J^+ X = J_q^{\pm} Y + iZ\,,$$

либо вид:

$$J^- : J^- X = J_q^{\pm} Y - iZ\,.$$

В [1] доказано, что почти комплексные структуры вида J^+ интегрируемы, а почти комплексные структуры вида J^- не интегрируемы.

Матричное представление ортогональной, инвариантно действующей на слоях твисторного расслоения, почти комплексной структуры в каждой точке $\mathbb{CP}^3$ в группе $Sp(2)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \pm(ai + bj + ck) & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

А в группе $SU(3)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \pm\begin{pmatrix} ix & -y + iz \\ y + iz & -ix \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Литература

[1] N. Hitchin. *Kahlerian twistor spaces.* // Proc. Lond. Math. Soc. (3) 43, 133—150, 1981.

[2] Ш. Кобаяси, К. Намидзу. *Основы дифференциальной геометрии.* В 2 т. // Москва: Наука, 1981.

[3] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы и приложения.* В 2 т. // Москва: Эдиториал УРСС, 1998.