Инвариантные аффинорные метрические структуры на однородных пространствах[1]

Е.С.Корнев
КемГУ

Пусть M – вещественное однородное пространство размерности n, G – связная группа Ли, транзитивно действующая на M, и H – подгруппа изотропии некоторого фиксированного элемента $o \in M$. Легко проверить что M диффеоморфно G/H. Пусть $L(g)$ – алгебра Ли группы G, $L(h)$ - подалгебра изотропии, и P – дополнение $L(h)$ в $L(g)$ отождествляемое с $T_e(G/H)$. Тогда:

$$L(G) = L(H) \oplus P.$$

Дифференциальная p-форма ω на M называется H-инвариантной, если для любого $h \in H$ и любого $x \in M, d^*h\omega_{xh^{-1}} = \omega_x$. В [2] показано, что каждая H-инвариантная p-форма на M порождает Ad_H-инвариантную p-форму на группе G, а каждая Ad_H-инвариантная p-форма на группе G индуцирует H-инвариантную p-форму на M. Однако, полученная p-форма на M может оказаться тривиальной.

Пусть α' – нетривиальная H-инвариантная 1-форма на M. Тогда, на M существует распределение касательных подпространств $\ker\alpha'$, коразмерности 1, инвариантное относительно действия подгруппы H. Если однородное пространство M является параллелезуемым, то на M существует H-инвариантное векторное поле $X : \alpha'(X) = 1$ трансверсальное $\ker\alpha$ в любой точке из M. Распределение $\ker\alpha'$ в каждой точке $x \in M$ пораждает интегральное подмногообразие, проходящее через точку x, и инвариантное под действием подгруппы H.

[1]работа поддержана грантом РФФИ, грант 12-01-00873-а,
а также грантом Президента РФ по поддержке научных школ, проект НШ-544.2012.1.

Обратно, пусть на M существует регулярное H-инвариантное распределение касательных подпространств Q коразмерности 1, и существует H-инвариантное векторное поле X трансверсальное Q в каждой точке из M. Полагая $\alpha'(Q) = 0, \alpha'(X) = 1$, получаем нетривиальную H-инвариантную 1-форму на M.

Таким образом, имеем следующее:

Теорема 1. *Параллелезуемое однородное пространство $M \cong G/H$ допускает нетривиальную H-инвариантную 1-форму тогда и только тогда, когда на M существует регулярное H-инвариантное распределение Q касательных подпространств коразмерности 1, и существует H-инвариантное векторное поле трансверсальное Q в каждой точке из M.*

Замечание. из теоремы 1 следует, что если подгруппа изотропии действует на однородном пространстве M неприводимо, то на M не существует нетривиальных H-инвариантных 1-форм. А в случае односвязного однородного пространства, не существует H-инвариантных симплектических структур.

Пусть α – Ad_H-инвариантная 1-форма на группе G порожденная H-инвариантной 1-формой α' на M. *Радикалом* 1-формы α называется максимальное подпространство $L(R)$ в $L(G)$ такое, что для любого $X \in L(R)$ и любого $Y \in L(G), d\alpha(X,Y) = 0$. в [1] доказано, что радикал $L(R)$ образует подалгебру в $L(G)$, а порожденная этой подалгеброй связная подгруппа совпадает с компонентой связности единицы подгруппы изотропии присоединенного действия группы G на 1-форму α. Связная подгруппа $R = \exp(L(R))$, порожденная радикалом 1-формы, называется *подгруппой радикала.* Поскольку 1-форма α является Ad_H-инвариантной, то $H \subset R$. Очевидно, что радикал формы α' на M равен $\pi(L(R))$, где π – фактор-отображение $G \mapsto G/H$. В частности, если $L(R) = L(H)$, то 2-форма $d\alpha'$ невырождена на M. В [1] доказано, что орбита действия группы G на левоинвариантную 1-форму α, диффеоморфная G/R, всегда имеет четную размерность. Следовательно, при $R = H, d\alpha'$ задает точную симплектическую структуру на M.

таким образом, получаем следующий результат:

Теорема 2. *Любое однородное пространство $M \cong G/H$, на котором существует H-инвариантная 1-форма, порождающая левоинвариантную 1-форму с подгруппой радикала H на группе G, имеет четную размерность, и допускает H-инвариантную точную симплектическую структуру.*

Пусть 1-форма α на группе G имеет ненулевой радикал $L(R)$. Обозначим через E пересечение P с $L(R)$, а через D – дополнение множества E в P.

Замечание. Поскольку на группе Ли всегда можно задать левоинвариантную риманову метрику, то подпространство D всегда можно считать ортогональным дополнением подпространства E относительно некоторой метрики.

Аффинором на группе Ли G называется левоинвариантное поле Φ эндоморфизмов алгебры Ли $L(G)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. Для любого $X \in L(R), \Phi X = 0$,
2. Для любого $X \in D, \Phi^2 X = -X$,
3. $d\alpha \circ \Phi = d\alpha$,
4. Симметричная 2-форма $d\alpha(X, \Phi Y)$ является положительно определенной для всех X и y из $L(G)$.

Из условия 2 следует, что Φ задает почти комплексную структуру на D, а из условий 3 и 4, что 2-форма $d\alpha(X, \Phi Y)$ является римановой метрикой для любых X и Y из D.

Метрикой радикала на группе G называется левоинвариантная симметричная положительно определенная 2-форма $\beta : \beta(X, Y) = 0$ для любого $X \in d$ и любого $Y \in L(G)$, и невырождена для любых X и Y из $L(R)$. Легко видеть, что форма $g(X, Y) = d\alpha(X, \Phi Y) + \beta(X, Y)$ является римановой метрикой на группе G. Такая метрика называется *аффинорной метрической структурой*.

По аналогии с левоинвариантной аффинорной метрической структурой на группе Ли можно определить H-инвариантную аффинорную метрическую структуру на однородном пространстве M. Такая аффинорная метрическая структура порождает Ad_H-инвариантную аффинорную метрическую структуру на группе G. Однако, радикал соответствующей 1-формы на однородном пространстве уже нельзя рассматривать как подалгебру, порождающую подгруппу радикала.

Используя теорему 1 и классификацию H-инвариантных римановых метрик из [2], получаем следующее:

Теорема 3. *Параллелезуемое однородное пространство $M \cong G/H$ с компактной связной подгруппой изотропии допускает H-инвариантную аффинорную метрическую структуру тогда и только тогда, когда дополнение подалгебры изотропии в алгебре Ли группы G представляется в виде прямой суммы одномерного Ad_H-инвариантного подпространства P_0 и Ad_H-инвариантного подпространства P_1 коразмерности 1. Причем, если подалгебра изотропии $L(H)$ и подпространство P_1 являются Ad_H-неприводимыми, то множество всех H-инвариантных аффинорных метрических структур построенных по заданной H-инвариантной 1-форме на M изоморфно $\mathbf{R}^{3+}$.*

Следствие. *если дополнение подалгебры изотропии $L(H)$ в алгебре Ли $L(G)$ является Ad_H-неприводимым, то на однородном пространстве $M \cong G/H$ не существует H-инвариантных аффинорных метрических структур.*

Аффинорная метрическая структура на группе G называется *нормальной*, если для любого $X \in D, \mathrm{Ad}_{\Phi X} = \Phi \circ \mathrm{Ad}_X$. В [1] доказано, что аффинор нормальной аффинорной метрической структуры на группе G задает интегрируемую почти комплексную структуру на G/R, где R – подгруппа радикала 1-формы α. Поскольку Φ сохраняет 2-форму $d\alpha$, и $d^2\alpha = 0$, то ограничение нормальной аффинорной метрической структуры на подпространство D задает левоинвариантную кэлерову метрику на G/R. В случае когда подгруппа радикала R совпадает с подгруппой изотропии H, получаем следующий результат:

Теорема 4. *Пусть $M \cong G/H$ – вещественное однородное пространство четной размерности. Тогда, если на M существует H-инвариантная аффинорная метрическая структура, порождающая левоинвариантную нормальную аффинорную метрическую структуру с подгруппой радикала H, то M допускает комплексную структуру и H-инвариантную кэлерову метрику.*

Размерность подпространства E задает естественную классификацию H-инвариантных аффинорных метрических структур на однородном пространстве M по размерности радикала. В частности, при $\dim(E) = 0$ получаем почти кэлеровы (а в случае нормальных аффинорных метрических структур - кэлеровы) метрические структуры на M. А при $\dim(E) = 1$ получаем контактные метрические структуры на M.

Библиографический список

[1] *Корнев Е.С.* Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли. – Сиб. матем. журн. 2012. т. 53. № 1. С. 107-123.

[2] *Бессе. А.* Многообразия Эйнштейна. – В 2-х т. Т. II. Пер. с англ. Москва: Мир, 1990.