Аффинорная геометрия на алгеброидах Ли[1]

Е.С. Корнев
Кемеровский государственный университет
q148@mail.ru

Пусть M – паракомпактное ориентируемое многообразие класса C^∞, E – вещественное векторное расслоение ранга r над M, π – проекция $E \mapsto M$ и α – послойная 1-форма на E класса C^∞. Векторное расслоение E называется *алгеброидом Ли* [2], если на множестве сечений этого расслоения $C^\infty(E)$ задана операция скобки Ли $[,]$, а также существует линейное отображение $\Psi : C^\infty(E) \to C^\infty(TM)$, обладающее следующими свойствами:

1. Для любых сечений $\sigma, \tau \in C^\infty(E), [\Psi\sigma, \Psi\tau] = \Psi[\sigma, \tau]$.
2. Для любой функции $f \in C^\infty(M)$ и любых сечений $\sigma, \tau \in C^\infty(E)$,
$$[\sigma, f\tau] = (\Psi\sigma)(f)\tau + f[\sigma, \tau].$$

Отображение Ψ задает гомоморфизм векторных расслоений E и TM, и определяет действие сечения σ векторного расслоения E на функцию f по формуле:

$$\sigma(f) = (\Psi\sigma)(f).$$

Так как алгеброид Ли E является векторным расслоением с операциями взятия скобки Ли и действия сечений векторного расслоения на функции из $C^\infty(M)$, то на E существует внешний дифференциал d, определённый стандартным инвариантным образом: для любых двух сечений σ и τ из $C^\infty(E)$,

$$d\alpha(\sigma, \tau) = \sigma(\alpha(\tau)) - \tau(\alpha(\sigma)) - \alpha([\sigma, \tau]).$$

Множество всех сечений $\sigma \in C^\infty(E) : \mathrm{i}_\sigma d\alpha = 0$ (i обозначает внутреннее произведение) называется *радикалом* 1-формы α, и обозначается $\mathrm{rad}\alpha$. 1-форма α называется *регулярной*, если ее радикал

[1]Работа поддержана грантом РФФИ # 12-01-00873-а,
а также президентским грантом по поддержке научных школ # НШ-544.2012.1

имеет постоянную размерность во всех точках из M. Радикал регулярной незамкнутой 1-формы есть векторное подрасслоение векторного расслоения E ранга $\leqslant r-2$. Далее везде будем предполагать, что 1-форма α является регулярной и незамкнутой.

Поскольку на E всегда существует риманова метрика, то будем считать, что на E задано послойное скалярное произведение $(,)$. Отсюда E раскладывается в ортогональную сумму $\mathrm{rad}\alpha$ и ортогонального векторного подрасслоения D. Ортогональное подрасслоение D будем называть *рабочим расслоением.* Обозначим через Φ непрерывное поле эндоморфизмов векторного расслоения E, удовлетворяющее следующим свойствам: для любых сечений σ и τ векторного расслоения E,

$$(\Phi\sigma, \Phi\tau) = (\sigma, \tau), \quad d\alpha(\sigma, \tau) = (\Phi\sigma, \tau). \tag{0}$$

Предложение 1. *Поле эндоморфизмов Φ обладает следующими свойствами:*

(1) $\Phi^2|_D = -\mathrm{id}$.

(2) $\Phi^* d\alpha = d\alpha$.

(3) $\Phi^* = -\Phi$.

(4) $\mathrm{rad}\alpha = \ker\Phi$.

(5) Для любой точки $x \in M$ оператор Φ является положительно определенным.

Доказательство. Используя условия (0), для любых сечений σ и τ векторного расслоения E имеем:

$$(\Phi\sigma, \tau) = d\alpha(\sigma, \tau) = -d\alpha(\tau, \sigma) = -(\sigma, \Phi\tau).$$

Отсюда получаем свойство (3).

Используя свойство (3) и условия (0) имеем:

$$(\Phi^2\sigma, \tau) = -(\Phi\sigma, \Phi\tau) = -(\mathrm{id}\sigma, \tau).$$

Отсюда получаем свойство (1).

Свойства (2), (4) и (5) очевидно вытекают из условий (0).■

Чтобы определить поле операторов Φ, удовлетворяющее условиям (0), необходимо зафиксировать на алгеброиде Ли риманову метрику. Однако, если отказаться от использования метрики, то можно определить такое поле операторов, используя свойства из предложения 1 как аксиомы.

Определение 2. *Пусть E – алгеброид Ли с регулярной 1-формой α и рабочим векторным расслоением D. Аффинором, ассоциированным с 1-формой α, называется непрерывное поле эндоморфизмов Φ векторного расслоения E, обладающее следующими свойствами:*

(1) $\mathrm{rad}\alpha = \ker \Phi$.

(2) $\Phi^2|_D = -\mathrm{id}$.

(3) $\Phi^* d\alpha = d\alpha$.

(4) Для любого сечения $\sigma \in D, d\alpha(\sigma, \Phi\sigma) \geqslant 0$.

Аффинорной структурой на алгеброиде Ли E называется пара α, Φ, где α – регулярная 1-форма на E, Φ – ассоциированный с 1-формой α аффинор.

Замечание 3. *Для полной строгости определения аффинорной структуры необходимо также задать рабочее расслоение D. Поскольку на алгеброиде Ли с паракомпактной базой всегда существует риманова метрика, то далее, если не будет явно указан выбор рабочего расслоения, будем подразумевать под рабочим расслоением расслоение ортогональных* $\mathrm{rad}\alpha$ *относительно некоторой римановой метрики векторных подпространств.*

Обозначим через $d\alpha_D$ ограничение 2-формы $d\alpha$ на рабочее расслоение D. В [1] доказано, что D всегда имеет четный ранг. Поэтому $d\alpha_D$ есть симплектическая структура на D. Из определения 2 следует, что ограничение аффинора Φ на D есть комплексная структура на D, ассоциированная с 2-формой $d\alpha_D$. Обратно, если на D задана комплексная структура J, сохраняющая 2-форму $d\alpha_D$, то полагая

$$\Phi\sigma = J\sigma,\ \sigma \in D \ \text{ и } \ \Phi\sigma = 0,\ \sigma \in \mathrm{rad}\alpha,$$

получаем аффинор Φ на E. Таким образом получаем следующий результат:

Предложение 4. *Пусть α – регулярная 1-форма на вещественном алгеброиде Ли E и D – расслоение векторных подпространств* *дополнительных к* $\mathrm{rad}\alpha$*, тогда множество аффиноров, ассоциированных с 1-формой* α *находится во взаимнооднозначном соответствии со множеством комплексных структур на* D*, ассоциированных с 2-формой* $d\alpha$*.*

Пусть $e(E)$ – класс Эйлера векторного расслоения E, а $W_1(D)$ – первый класс Штиффеля-Уитни подрасслоения D. Известно, что существование на M глобального сечения, всюду отличного от 0, влечет $e(E) = 0$, а существование на D комплексной структуры влечет $W_1(D) = 0$. Если на алгеброиде Ли E существует аффинорная структура α, Φ, то $d\alpha$ есть всюду отличное от 0 на M сечение векторного расслоения $\Lambda^2(E)$ внешних 2-форм на E. А ограничение аффинора Φ на D есть комплексная структура на D. Таким образом, получаем необходимое условие существования на алгеброиде Ли аффинорной структуры.

Предложение 5. *Если на алгеброиде Ли* E *существует аффинорная структура с рабочим расслоением* D*, то*

$$e(\Lambda^2(E)) = W_1(D) = 0.$$

Предложение 1 дает очевидный пример аффинорной структуры при наличии фиксированной римановой метрики на алгеброиде Ли. Другой пример аффинорной структуры можно получить как обобщение кэлеровой структуры.

Пусть E – вещественный алгеброид Ли произвольного ранга $r \geqslant 3$, Ω – регулярная замкнутая внешняя 2-форма на E и $H^2(E\ \mathbb{R}) = 0$. Подрасслоение D, на котором 2-форма Ω не вырождается, всегда имеет четный ранг. Из равенства нулю второй группы когомологий следует, что на E существует 1-форма $\alpha : d\alpha = \Omega$, и α – регулярная 1-форма с радикалом

$$\mathrm{rad}\alpha = \{\sigma : \mathrm{I}_\sigma \Omega = 0\}.$$

Пусть J – комплексная структура на D, ассоциированная с 2-формой Ω. Продолжим поле операторов J на $\mathrm{rad}\alpha$ нулем до поля эндоморфизмов Φ векторного расслоения E. Получаем, что Φ удовлетворяет всем условиям определения 2, а, следовательно, является аффинором на E, ассоциированным с 1-формой α.

Если алгеброид Ли E имеет нечетный ранг $2r + 1$, и α – контактная структура на E, то $\dim(\mathrm{rad}\alpha) = 1$ и $D = \ker\alpha$. Аффинорная структура в этом случае полностью определяется комплексной структурой на $\ker\alpha$, ассоциированной с $d\alpha$.

Обозначим через $d\alpha_\Phi$ симметричную 2-форму на D,

$$d\alpha_\Phi(\sigma,\tau) = d\alpha(\sigma,\Phi\tau)\forall\sigma,\tau\in C^\infty(D).$$

Поскольку 2-форма $d\alpha_\Phi$ невырождена на D, то она задает на D риманову метрику. Отсюда, пара $D, d\alpha_\Phi$, где α – регулярная незамкнутая 1-форма на E, Φ – ассоциированный с 1-формой α аффинор, а D – соответствующее рабочее расслоение, есть субриманова структура на алгеброиде Ли E.

Будем говорить, что подрасслоение $Q\subset E$ порождает алгеброид Ли E, если существует положительное целое число $k : Q^k = E$, где $Q_0 = Q, Q^i = [Q^{i-1}, Q_0]$. Если рабочее расслоение D для регулярной 1-формы α порождает весь алгеброид Ли E, то пара $D, d\alpha_\Phi$ является обобщением понятия пространства Карно-Каратеодори для алгеброидов Ли. При $E = TM$ получаем классическое пространство Карно-Каратеодори.

Пусть α – регулярная 1-форма на алгеброиде Ли E, Φ – ассоциированный с 1-формой α аффинор и D – соответствующее рабочее расслоение. Радикал симметричной 2-формы b на алгеброиде Ли E определяется стандартным способом:

$$\mathrm{rad}b = \{\sigma\in C^\infty(E) : \mathrm{I}_\sigma b = 0\}.$$

Определение 6. *Метрикой радикала на алгеброиде Ли E называется симметричная 2-форма β на E, удовлетворяющая следующим свойствам:*

(1) $\mathrm{rad}\beta = D$.

(2) $\beta(\sigma,\sigma)\geqslant 0\forall\sigma\in C^\infty(E)$.

Из определения 6 следует, что метрика радикала β невырождена и положительно определена на $\mathrm{rad}\alpha$. Таким образом, ограничение 2-формы β на $\mathrm{rad}\alpha$ есть риманова метрика, а пара $\mathrm{rad}\alpha,\beta$ задает еще одну субриманову структуру на алгеброиде Ли E.

Предложение 7. *Пусть α – контактная структура на алгеброиде Ли E с рабочим расслоением D. Тогда любая метрика радикала на E имеет вид:*

$$\beta = \exp(f)\alpha\otimes\alpha,$$

где f – функция класса C^∞ на M

Доказательство Поскольку α – контактная структура на E, то $D = \ker\alpha$ и на M существует сечение ξ, трансверсальное подрасслоению D такое, что $\alpha(\xi) = 1$ в любой точке из M. Тогда любые два сечения σ, τ можно представить в виде:

$$\sigma = \sigma' + \alpha(\sigma)\xi, \tau = \tau' + \alpha(\tau)\xi,$$

где σ' – проекция сечения σ на $\ker\alpha$, τ' – проекция сечения τ на $\ker\alpha$.

Пусть β – метрика радикала на E. Имеем:

$$\beta(\sigma,\tau) = \beta(\sigma',\tau')+\beta(\sigma',\alpha(\tau)\xi)+\beta(\alpha(\sigma)\xi,\tau')++\alpha(\sigma)\alpha(\tau)\beta(\xi,\xi) = \alpha(\sigma)\alpha(\tau)\beta(\xi,\xi).$$

Полагая $f = \ln\beta(\xi,\xi)$, получаем $\beta = \exp(f)\alpha\otimes\alpha.\blacksquare$.

С помощью метрики радикала можно построить на E метрическую структуру, определенную уже на всем алгеброиде Ли. *аффинорной метрической структурой* на алгеброиде Ли E называется риманова метрика

$$g_\Phi = d\alpha_\Phi + \beta,$$

где β – заданная метрика радикала на E. Легко видеть, что при $\sigma \in D, \tau \in \mathrm{rad}\alpha, g_\Phi(\sigma,\tau) = 0$. Т. е. подрасслоения D и $\mathrm{rad}\alpha$ являются ортогональными относительно аффинорной метрической структуры. Левоинвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли изучены в [1].

По аналогии с обычным аффинором можно определить понятие обобщенного λ-аффинора.

Определение 8. *Пусть λ – некоторое вещественное число, E – алгеброид Ли с регулярной 1-формой α и рабочим векторным расслоением D. λ - аффинором,ассоциированным с 1-формой α называется непрерывное поле эндоморфизмов Φ векторного расслоения E, обладающее следующими свойствами:*

(1) $\Phi|_{\mathrm{rad}\alpha} = \lambda\,\mathrm{id}$.

(2) $\Phi^2|_D = -\mathrm{id}$.

(3) $\Phi^* d\alpha_D = d\alpha_D$.

(4) Для любого сечения $\sigma \in D$ $d\alpha(\sigma, \Phi\sigma) \geqslant 0$.

Из определения 8 видно, что при $\lambda \neq 0$ λ-аффинор является невырожденным линейным оператором в каждой точке из M, а при $\lambda = 0$ совпадает с обычным аффинором. Предложение 4 остается справедливым и для обобщенных λ-аффиноров. Кроме того, λ-аффинор Φ сохраняет 2-форму $d\alpha$ на всем E, т. е. $\Phi^* d\alpha = d\alpha$.

Пример. *Пусть M - вещественное многообразие размерности $2n$ и $E = TM \oplus T^*M$ – векторное расслоение над M. Такое векторное расслоение можно наделить структурой алгеброида Ли с помощью скобки Куранта:*

$$[X + \omega, Y + \theta] = [X, Y] + \mathrm{L}_X\theta - \mathrm{L}_Y\omega - \frac{1}{2}d(\mathrm{i}_X\theta - \mathrm{i}_Y\omega),$$

где $\mathrm{L}_X\theta$ – производная Ли 1-формы θ вдоль векторного поля X. Пусть η – 1-форма на M, такая, что 2-форма $d\eta$ является симплектической формой на M. Введем на алгеброиде Ли E 1-форму

$$\alpha : \alpha(X + \omega) = \eta(X).$$

Получаем:

$$d\alpha(X + \omega, Y + \theta) = d\eta(X, Y),$$

отсюда:

$$d\alpha(X + \omega, \theta) = 0 \forall \omega, \theta \in T^*M, X \in TM.$$

Получаем $\mathrm{rad}\alpha = T^*M, D = TM$.

Пусть J – почти комплексная структура, ассоциированная с симплектической формой $d\eta$ и сохраняющая ориентацию на M. Тогда, по предложению 4, поле эндоморфизмов Φ векторного расслоения E, действующее на сечении $\sigma = X + \omega$ как

$$\Phi\sigma = JX,$$

определяет аффинор на E, а пара α, Φ есть аффинорная структура на $TM \oplus T^*M$.

Если M компактное, то на E можно задать метрику радикала β следующим образом:

$$\beta(x + \omega, Y + \theta) = \int_M \omega \wedge \star\theta,$$

где $\star\theta$ обозначает действие оператора Ходжа на 1-форму θ. Получаем на $TM \oplus T^*M$ аффинорную метрическую структуру g_Φ:

$$g_\Phi(X + \omega, Y + \theta) = d\eta(X, JY) + \int_M (\omega \wedge \star\theta)\mu.$$

По аналогии с понятием гиперкомплексной структуры введем определение гипераффинорной структуры.

Определение 9. *Гипераффинорной структурой на алгеброиде Ли E называется пара: регулярная 1-форма α на E и ассоциированный аффинор Φ вида: $\Phi = a\Phi_1 + b\Phi_2 + c\Phi_3, a, b, c \in C^{\infty}(M)$, где Φ_1, Φ_2, Φ_3 аффиноры, ассоциированные с 1-формой α, удовлетворяющие условию: $\Phi_i\Phi_j = -\Phi_j\Phi_i | i < j \leqslant 3$.*

Также как для аффинорных структур легко установить, что множество всех гипераффинорных структур с фиксированной регулярной 1-формой α находится во взаимнооднозначном соответствии со множеством гиперкомплексных структур на рабочем расслоении D. Из определения 9 и условия (2) определения 2 следует, что функции a, b, c должны удовлетворять условию: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Отсюда следует, что функции a, b, c представляются в виде:

$$a = \cos(u)\cos(v), \; b = \cos(u)\sin(v), \; c = \sin(v),$$

где u, v – некоторые функции класса C^{∞} на M. Таким образом, любая гипераффинорная структура на алгеброиде Ли задается регулярной 1-формой α, тройкой базисных, сохраняющих $d\alpha$, комплексных структур Φ_1, Φ_2, Φ_3 на рабочем расслоении D и парой функций $u, v \in C^{\infty}(M)$.

Список литературы

[1] *Корнев Е. С.* Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли — Сиб. матем. журн. 2012, т. 53б №1, — С. 107-123.

[2] *Gualtieri M.* Generalized complex geometry. — Oxford, DPhil thesis. — 2003. (ArXiv.org: math.DG/0401221).