УДК 514.765

ИНВАРИАНТНЫЕ АФФИНОРНЫЕ И СУБКЭЛЕРОВЫ СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Корнев Е. С., Славолюбова Я. В.

Аннотация. На однородных пространствах G/H рассматриваются инвариантные относительно действия группы G аффинорные метрические структуры и их частный случай - субкэлеровы структуры. Аффинорные метрические структуры являются обобщением почти кэлеровых и почти контактных метрических структур для многообразий произвольной размерности. Рассматриваются инвариантные субримановы и субкэлеровы структуры, связанные с фиксированной 1-формой, имеющей нетривиальный радикал. Помимо результатов для однородных пространств произвольной размерности такие структуры отдельно изучены на однородных пространствах размерности 4 и 5.

Ключевые слова. аффинорные структуры, кэлеровы структуры, субримановы метрики, однородные пространства.

1. Введение

В классическом случае на многообразиях вещественной размерности $2n$ изучают кэлеровы структуры (Ω, J, g), где g – эрмитова метрика, J – ортогональная комплексная структура и Ω – фундаментальная 2-форма метрики g. На многообразиях размерности $2n{+}1$ изучают контактные метрические структуры (θ, Φ, g), где θ – контактная форма, Φ – вырожденный оператор, действующий на ядре формы θ как ортогональная почти комплексная структура, и g – риманова метрика ассоциированная с 1-формой θ. В случае кэлеровой структуры радикал 2-формы Ω равен нулю. В случае контактной метрической структуры радикал 2-формы $d\theta$ является одномерным. Мы вводим понятие аффинорной метрической структуры, которое обобщает понятие контактной метрической структуры для многообразий произвольной размерности и 1-форм, имеющих радикал любой размерности. Аффинорная метрическая структура на вещественном многообразии произвольной размерности это – тройка (α, Φ, g), где α – произвольная 1-форма, Φ – особый оператор, называемый *аффинором*, и g – риманова метрика ассоциированная с 1-формой α. В случае аффинорной метрической структуры 2-форма $d\alpha$ может иметь радикал любой размерности. Кроме того, аффинорная метрическая структура всегда определяет естественную субриманову и субкэлерову структуру на многообразиях произвольной размерности.

Понятие аффинорной структуры естественным образом возникает при рассмотрении расслоения P над многообразием вещественной размерности $2n$ со слоем $S^1 \cong U(1)$. В этом случае форма связности ω является 1-формой на P со значениями в $\mathbb{R}$, а форма кривизны связности Ω равна $d\omega$. Кэлерова структура на комплексном многообразии в случае, когда фундаментальная 2-форма

Работа поддержена грантом № РФФИ 12-01-00873-а, а также президентским грантом по поддержке научных школ № НШ-4382.2014.1.

является точной, также является частным случаем аффинорной метрической структуры. В частности, это выполняется на любом симплектическом многообразии $M : H^2(M;\mathbb{R}) = 0$. Аффинорная метрическая структура также возникает на многообразии вещественной размерности $2n+2$, в котором содержится симплектическое подмногообразие, а симплектическая форма является точной (см. раздел 3, пример 3). Контактные и почти контактные метрические структуры на многообразиях нечетной размерности также являются примерами аффинорных метрических структур.

В общем случае 1-форма на произвольном многообразии M может обращаться в нуль в некоторых точках многообразия M. Однако, когда M есть однородное пространство G/H, то любая G-инвариантная 1-форма на M либо отлична от нуля во всех точках из M, либо тождественно равна нулю на M. Поэтому мы рассматриваем аффинорные метрические структуры и порождаемые ими субкэлеровы структуры на однородных пространствах. Поскольку существует естественная связь между G-инвариантными аффинорными метрическими структурами на однородных пространствах и левоинвариантными аффинорными метрическими структурами на группах Ли, то мы можем использовать многие результаты, изложенные в работах [2] и [8]. Когда многообразие имеет нечетную размерность $2n+1$, часто аффинорные метрические структуры называют *почти контактными метрическими структурами.* Строгие аффинорные метрические структуры (см. раздел 4) на трехмерных однородных пространствах были классифицированы в [1]. Поэтому следующим шагом в изучении аффинорных метрических структур на однородных пространствах являются случаи размерности 4 и 5.

В первом разделе мы рассматриваем свойства G-инвариантных 1-форм и радикала таких форм. В разделах 3 и 4 мы вводим и исследуем аффинорные метрические структуры и порождаемые ими субкэлеровы структуры на однородных пространствах произвольной размерности. Последние два раздела посвящены результатам для однородных пространств размерности 4 и 5.

2. Радикал инвариантных 1-форм

Пусть (M, g) – однородное риманово пространство вещественной размерности $n \geqslant 3$, G – группа изометрий метрики g, действующая на M транзитивно и эффективно, o – фиксированная точка в M и H – подгруппа изотропии точки o. Будем считать, что задано разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus h : \mathfrak{p} \cong T_oM$, где $\mathfrak{p}$ – Ad_H-инвариантное ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$относительно некоторой левоинвариантной римановой метрики на группе G. Будем отождествлять однородное пространство M с множеством левых классов смежности по подгруппе H. При таком отождествлении задана каноническая проекция $\pi : G \to M$, и $\mathfrak{h} \subseteq \ker d\pi_e$, где e – единица группы G. Обозначим через $\tau : \mathfrak{p} \to T_oM$ изоморфизм полученный ограничением $d\pi_e$ на подпространство $\mathfrak{p}$.

Определение 2.1. Радикалом полилинейной p-формы Ω, $p \geqslant 2$, в точке $x \in M$ называется касательное подпространство $\mathrm{rad}\Omega_x = \{X \in T_xM : \mathrm{I}_X\, \Omega_x = 0\}$, где $\mathrm{I}_X\, \Omega$ – $(p-1)$-форма полученная из Ω фиксацией первого векторного аргумента. Если размерность подпространств $\mathrm{rad}\Omega_x$ не зависит от точки x, то форма Ω называется регулярной, а распределение касательных подпространств $\mathrm{rad}\Omega = \bigcup_{x\in M} \mathrm{rad}\Omega_x$ называется радикалом регулярной формы Ω на M.

Полилинейная p-форма Ω на однородном пространстве M называется G-инвариантной, если $\Omega_x = \Omega_o \circ dg^{-1}\,\forall g \in G : g(o) = x$. Ниже мы покажем, что G-инвариантная полилинейная форма всегда является регулярной, т. е. ее радикал является регулярным распределением на M. Если Ω – G-инвариантная полилинейная p-форма и $\hat{\Omega} = \Omega \circ \tau$, то $\mathrm{rad}\hat{\Omega} = \tau^{-1}\mathrm{rad}\Omega \oplus \mathfrak{h}$. Будем называть левоинвариантную полилинейную p-форму $\hat{\Omega}$ на группе Ли G изотропно вырожденной, если $\mathfrak{h} \subset \mathrm{rad}\hat{\Omega}$. Обобщая известные для римановых метрик результаты (см [6, 8]), получаем:

Теорема 2.2. *Для любого натурального числа p множество G-инвариантных полилинейных p-форм на однородном пространстве $M = G/H$ и множество G-левоинвариантных H-правоинвариантных изотропно вырожденных полилинейных p-форм на группе ли G находятся во взаимнооднозначном соответствии.*

По теореме 2.2 G-инвариантная риманова метрика g на однородном пространстве $M = G/H$ порождает G-левоинвариантную H-правоинвариантную симметричную 2-форму β на группе G такую, что $\mathrm{rad}\beta = \mathfrak{h}$, а ограничение β на $\mathfrak{p}$ есть Ad_H-инвариантное скалярное произведение. Для однородного риманова пространства G/H существует представление подгруппы изотропии в матричной группе $\mathrm{SO}(n)$ (см. [6]).

Пусть α – G-инвариантная 1-форма на однородном римановом пространстве M. Тогда на группе G заданы 1-форма $\hat{\alpha} = \alpha \circ d\pi$ и внешняя 2-форма $d\hat{\alpha} = d\alpha \circ d\pi$. Причем, формы $\hat{\alpha}$ и $d\hat{\alpha}$ являются изотропно вырожденными.

Определение 2.3. 1-форма α на многообразии M называется регулярной, если ее внешний дифференциал $d\alpha$ является регулярной 2-формой на M. Радикалом регулярной 1-формы α на многообразии M (обозначается $\mathrm{rad}\alpha$) называется радикал ее внешнего дифференциала $d\alpha$.

Сразу из определения следует, что если α – замкнутая 1-форма, то $\mathrm{rad}\alpha = TM$. Если α – незамкнутая регулярная 1-форма, то $\mathrm{rad}\hat{\alpha} = \tau^{-1}(\mathrm{rad}\alpha \oplus \mathfrak{h})$. Если однородное риманово пространство M имеет четную размерность и $\mathrm{rad}\hat{\alpha} = \mathfrak{h}$, то $d\alpha$ есть симплектическая структура на M. Если $\Omega : \Omega = d\alpha$ – G-инвариантная точная внешняя 2-форма на M, то для любой G-инвариантной функции f на M, $\Omega = d(\alpha + df)$. Так как единственной G-инвариантной функцией на M является функция $f(x) = \mathrm{const}$, то 2-форма Ω однозначно определяет G-инвариантную 1-форму α. Таким образом, получаем следующий результат:

Теорема 2.4. *Для однородного риманова пространства $M = G/H$ размерности $2n$ существует взаимнооднозначное соответствие между множеством G-инвариантных точных симплектических структур на M и множеством G-левоинвариантных H-правоинвариантных 1-форм с радикалом равным $\mathfrak{h}$ на группе G.*

Сейчас мы докажем, что размерность радикала G-инвариантной 1-формы является постоянной на римановом однородном пространстве, т. е. G-инвариантная 1-форма всегда является регулярной.

Лемма 2.5. *Если α – G-инвариантная 1-форма на однородном римановом пространстве M, то $\dim(\mathrm{rad}\alpha_x) = \mathrm{const}$.*

Доказательство. Для любой точки $x \in M$ существует изометрия $g \in G$: $g(o) = x$. Для любого $v \in \mathrm{rad}\alpha_x$ существует $w \in T_oM : w = dg^{-1}v$. Поскольку $\mathrm{I}_v\, d\alpha_x = 0$ и 2-форма $d\alpha$ является G-инвариантной, то

$$\mathrm{I}_w\, d\alpha_o = \mathrm{I}_v\, (dg^{-1})^* d\alpha_o = \mathrm{I}_v\, d\alpha_x = 0.$$

Следовательно $w \in \mathrm{rad}\alpha_o$. Аналогичным образом получаем, что для любого $w \in \mathrm{rad}\alpha_o$ существует $v \in T_xM : w = dg^{-1}v$ и $v \in \mathrm{rad}\alpha_x$. Получаем, что $\mathrm{rad}\alpha_o = dg^{-1}\mathrm{rad}\alpha_x$ и $\dim(\mathrm{rad}\alpha_x) = \dim(\mathrm{rad}\alpha_o) \quad \forall x \in M$. □

Теорема 2.6. *Пусть $M = G/H$ – однородное риманово пространство размерности $n \geqslant 3$, α – незамкнутая G-инвариантная 1-форма на M и $r = \mathrm{rank}(\mathrm{rad}\alpha)$. Тогда:*

(1) *Если n четно, то r также четно и $0 \leqslant r \leqslant n-2$.*

(2) *Если n нечетно, то r также нечетно и $1 \leqslant r \leqslant n-2$.*

Доказательство теоремы 2.6 приведено в [2]. Заметим, что на однородных пространствах размерности 2 любая G-инвариантная 1-форма либо замкнута, либо имеет нулевой радикал. В частности, на сфере S^2 существует только тривиальная инвариантная 1-форма. Важным следствием этой теоремы является следующий факт:

Следствие 2.7. *Пусть α – незамкнутая G-инвариантная 1-форма на однородном римановом пространстве M произвольной размерности $n \geqslant 3$. Тогда ортогональное дополнение к радикалу 1-формы α всегда имеет четную размерность.*

Пусть α – незамкнутая G-инвариантная 1-форма на однородном римановом пространстве M, а $\hat{\alpha}$ – соответствующая изотропно вырожденная G-левоинвариантная H-правоинвариантная 1-форма на группе G. В [2] доказано, что $\mathrm{rad}\hat{\alpha}$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{r}$ эту подалгебру, а через R – подгруппу $\exp(\mathfrak{r})$. Имеем следующие включения:

$$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{r}, \;\; H \subseteq R.$$

Подгруппа R называется *подгруппой радикала.* В [2] доказано, что подгруппа радикала является замкнутой связной подгруппой, и $\mathrm{Ad}^*_R\, \hat{\alpha} = \hat{\alpha}$, то есть 1-форма $\hat{\alpha}$ является Ad_R-инвариантной. Из теоремы 2.6 следует, что на нечетномерном однородном римановом многообразии 1-форма α всегда имеет нетривиальный радикал и подгруппа изотропии H является собственной подгруппой подгруппы радикала R. Также мы получаем способ построения однородных симплектических пространств. Если на связной группе ли G существует левоинвариантная 1-форма с нетривиальной подгруппой радикала R, то однородное пространство G/R имеет четную размерность и допускает точную симплектическую структуру. Здесь мы считаем, что подгруппа R действует на группу G умножением справа. Теперь получаем следующий результат:

Теорема 2.8. *Пусть $M = G/H$ – однородное риманово пространство размерности $2n$ и подгруппа изотропии H является максимальной связной собственной подгруппой в G. Тогда любая G-инвариантная 1-форма на M либо замкнута, либо ее внешний дифференциал задает на M точную симплектическую структуру.*

Пусть $e(M)$ – класс Эйлера многообразия M. В [9] доказано, что если на многообразии M существует векторное поле отличное от нуля в каждой точке, то $e(M) \equiv 0$. Риманова метрика g на однородном пространстве M сопоставляет каждому векторному полю X на M 1-форму $\mathrm{I}_X\, g$. Обратно, по теореме Рисса (см. [10]) для любой 1-формы α на M существует единственное векторное поле $X : \alpha = \mathrm{I}_X\, g$. Получаем взаимнооднозначное соответствие между векторными полями и 1-формами на однородном римановом пространстве M. Получаем, что если $e(M) \not\equiv 0$, то любая G-инвариантная 1-форма α обращается в 0 в некоторой точке $x_0 \in M$. Но тогда существует $g \in G : g^{-1}(x_0) = o$ и $\alpha_o = \alpha_{x_0} \circ dg = 0$. Следовательно, $\alpha_x = 0 \quad \forall x \in M$. Получаем следующее достаточное условие отсутствия на однородном римановом пространстве G-инвариантных 1-форм:

Теорема 2.9. *На однородном римановом пространстве $M = G/H$ с ненулевым классом Эйлера не существует нетривиальных G-инвариантных 1-форм.*

Поскольку, на компактном замкнутом многообразии с положительной эйлеровой характеристикой любое векторное поле обращается в 0 в некоторой точке, и риманова метрика задает отождествление между векторными полями и 1-формами, то получаем следующий результат:

Теорема 2.10. *Пусть $M = G/H$ – компактное однородное риманово пространство, и $\chi(M)$ – эйлерова характеристика многообразия M. Если $\chi(M) > 0$, то на M не существует G-инвариантных ненулевых 1-форм.*

Поскольку четномерная сфера S^{2n} является однородным римановым пространством, и имеет строго положительную эйлерову характеристику при любом n, то получаем:

Следствие 2.11. *На сфере $S^{2n} = \mathrm{SO}(2n+1)/\mathrm{SO}(2n)$ не существует $\mathrm{SO}(2n+1)$-инвариантных 1-форм.*

Теорема 2.12. *Пусть $M = G/H$ – однородное риманово пространство, $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{p}$ – Ad_H-инвариантное ортогональное дополнение к подалгебре изотропии $\mathfrak{h}$, и Ad_H неприводимо действует на $\mathfrak{p}$. Тогда, на M не существует G-инвариантных 1-форм с нетривиальным радикалом.*

Доказательство. Пусть α – G-инвариантная 1-форма на M и $\hat{\alpha}$ – соответствующая ей G-левоинвариантная H-правоинвариантная 1-форма на группе G. Пусть E – прообраз $\mathrm{rad}\alpha$ в $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r} = \mathrm{rad}\hat{\alpha}$ и R – подгруппа радикала 1-формы $\hat{\alpha}$. Поскольку $\mathfrak{r}$ есть подалгебра в $\mathfrak{g}$ и $H \subseteq R$, то $\mathrm{Ad}_H\, \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{r}$. Так как $E \subset \mathfrak{p}$, то $\mathrm{Ad}_H\, E \subset \mathfrak{p}$. Поскольку $E = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{p}$, получаем:

$$\mathrm{Ad}_H\, E \subseteq \mathfrak{r} \cap \mathfrak{p} = E.$$

То есть, E – собственное Ad_H-инвариантное подпространство в $\mathfrak{p}$. Поскольку Ad_H действует на $\mathfrak{p}$ неприводимо, то либо $E = \{0\}$, либо $E = \mathfrak{p}$. $\square$

Замечание 2.13. Если однородное пространство M имеет размерность $2n+1$ и удовлетворяет условиям теоремы 2.12 то, в силу пункта (2) теоремы 2.6, на M не существует незамкнутых G-инвариантных 1-форм.

3. Инвариантные аффинорные метрические структуры

Пусть M – однородное риманово пространство размерности $n \geqslant 3$ с римановой метрикой g, G – группа изометрий, действующая на M транзитивно и эффективно, H – подгруппа изотропии точки o и α – незамкнутая G-инвариантная 1-форма на M. Обозначим через D ортогональное дополнение к $\mathrm{rad}\alpha$ относительно метрики g. В силу следствия 2.7 D является векторным расслоением четного ранга на M. Будем называть это векторное расслоение *рабочим расслоением*. Легко проверить, что распределения $\mathrm{rad}\alpha$ и D являются G-инвариантными. Ограничение $d\alpha$ на рабочее расслоение D является невырожденной внешней 2-формой.

Определение 3.1. Аффинором, ассоциированным с 1-формой α, называется непрерывное поле $\varPhi$ эндоморфизмов касательных пространств на M такое что:

$$g(\varPhi X, \varPhi Y) = g(X, Y) \quad \forall X, Y \in C^\infty(D),$$
$$d\alpha(X, Y) = g(\varPhi X, Y) \quad \forall X, Y \in C^\infty(TM).$$

Сразу из определения вытекают следующие свойства аффинора $\varPhi$:

(1) $\mathrm{rad}\alpha = \ker \varPhi$.
(2) $\varPhi^2|_D = -\mathrm{id}$.
(3) $\varPhi^* d\alpha = d\alpha$.
(4) $g(X, Y) = d\alpha(X, \varPhi Y) \quad \forall X, Y \in C^\infty(D)$.
(5) Если $x = g(o)$, то $\varPhi_x = dg \circ \varPhi_o \circ dg^{-1}$.

Аффинорной метрической структурой на многообразии M называется тройка $(\alpha, \varPhi, g)$, где α – регулярная 1-форма на M с нетривиальным радикалом, g – риманова метрика на M и $\varPhi$ – аффинор, ассоциированный с 1-формой α. Будем обозначать через $d\alpha_\varPhi$ ограничение симметричной 2-формы $d\alpha(X, \varPhi Y)$ на рабочее расслоение D. В общем случае, рабочее расслоение D может быть как голономным, так и не голономным распределением на M. Когда рабочее расслоение D вполне неголономно, из свойства (4) следует, что пара $(D, d\alpha_\varPhi)$ задает субриманову структуру на M. Такая субриманова структура называется *аффинорной субримановой структурой*. Следующий результат дает условие неголономности распределения D:

Теорема 3.2. *Если α – G-инвариантная 1-форма с нетривиальным радикалом на однородном римановом пространстве $M = G/H$, D – рабочее расслоение на M и $D \subseteq \ker\alpha$, то распределение D является неголономным.*

Доказательство. Используя инвариантное определение внешнего дифференциала 1-формы (см. [7]), для любых векторных полей $X, Y \in C^\infty(D)$ имеем:

$$d\alpha(X, Y) = \frac{1}{2}\left(X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])\right) = -\frac{1}{2}\,\alpha([X, Y]),$$

где $[X, Y]$ – скобка Ли векторных полей X и Y. Поскольку внешняя 2-форма $d\alpha$ невырождена на D, то существуют векторные поля $X', Y' \in D : [X', Y'] \notin \ker\alpha$. Следовательно, $[X', Y'] \notin D$, и распределение D не является инволютивным. По теореме Фробениуса получаем, что D является неголономным распределением на M. □

Примером однородного пространства, на котором существует аффинорная метрическая структура с голономным рабочим расслоением, является следующее пространство:

Пример 1. Пусть $M = G \times T^n$, где G – симплектическая группа Ли, T^n – n-мерный плоский тор. Пусть Ω – левоинвариантная точная симплектическая структура на G. Тогда на G существует левоинвариантная 1-форма $\alpha : d\alpha = \Omega$. Продолжим 1-форму α на T^n, считая $\alpha(X) = 0$ для любого векторного поля X на T^n. Получаем: $\mathrm{rad}\alpha = T(T^n)$. Пусть J – левоинвариантная почти комплексная структура на группе $G : J^*\Omega = \Omega$, сохраняющая ориентацию на G, и g_0 – стандартная евклидова метрика на торе T^n. Зададим на M риманову метрику g следующим образом:

$$g(X,Y) = \begin{cases} 0, \quad \text{при} \quad X \in \mathfrak{g}, Y \in T(T^n), \\ \Omega(X, JY), \quad \text{при} \quad X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}, \\ g_0(X,Y), \quad \text{при} \quad X \in T(T^n), Y \in T(T^n), \end{cases}$$

где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы Ли G. Очевидно, что поле эндоморфизмов $\varPhi$:

$$\varPhi X = \begin{cases} JX, \quad \text{при} \quad X \in \mathfrak{g}, \\ 0, \quad \text{при} \quad X \in T(T^n) \end{cases}$$

есть аффинор, ассоциированный с 1-формой α. Получаем левоинвариантную аффинорную метрическую структуру $(\alpha, \varPhi, g)$ на M с рабочим расслоением $D = (\mathfrak{g}, 0)$. Получаем, что распределение D является голономным.

Приведем еще примеры естественных аффинорных метрических структур на однородных пространствах.

Пример 2. Пусть $M = G/H$ – однородное риманово пространство размерности $2n+1$ с римановой метрикой g. Любая G-инвариантная 1-форма α вместе с аффинором $\varPhi$ определяет на M почти контактную метрическую структуру $(\alpha, \varPhi, g)$ (см. [1, 4]). В этом случае рабочее расслоение $D \subseteq \ker \alpha$ и по теореме 3.2 является неголономным распределением на M. В случае, когда распределение D является вполне неголономным (это всегда выполняется для строго контактных метрических структур) $(D, d\alpha_{\varPhi})$ есть G-инвариантная аффинорная субриманова структура на M.

Пример 3. Пусть $M = G/H$ – однородное риманово пространство размерности $2n+2$, $H^2(M;\mathbb{R}) = 0$, g – риманова метрика на M и Ω – вырожденная G-инвариантная внешняя 2-форма на M. Пусть Q – максимальное симплектическое подмногообразие в M размерности $2k$. Подмногообразие Q получается действием на начальную точку o некоторой связной подгруппы $K \subset G$. Поскольку $H^2(M;\mathbb{R}) = 0$, то на M существует G-инвариантная 1-форма $\alpha : d\alpha = \Omega$ и $d\alpha$ – невырожденная на Q внешняя 2-форма. Имеем: $\mathrm{rad}\Omega = \mathrm{rad}\alpha$, $\mathrm{rank}(\mathrm{rad}\alpha) = 2(n-k+1)$ и ограничение рабочего расслоения D на Q равно TQ. Пусть J – комплексная структура на слоях рабочего расслоения $D : J^*\Omega = \Omega$ и J сохраняет ориентацию слоев векторного расслоения D. Тогда поле эндоморфизмов $\varPhi$ касательных пространств на M:

$$\varPhi X = \begin{cases} JX, \quad \text{при} \quad X \in D, \\ 0, \quad \text{при} \quad X \in \mathrm{rad}\alpha \end{cases}$$

есть аффинор, ассоциированный с 1-формой α. Получаем G-инвариантную аффинорную метрическую структуру $(\alpha, \varPhi, g)$ на M. Поскольку ограничение $\varPhi$ на Q есть почти комплексная структура на Q, то Q есть почти кэлерово подмногообразие в M с почти эрмитовой метрикой $d\alpha_{\varPhi}$. Почти комплексная структура $\varPhi$ на Q определяет комплексную структуру $\hat{\varPhi} = \tau^{-1} \circ \varPhi_o \circ \tau$ на подпространстве

$\mathfrak{k} = \tau^{-1} D_o \subset \mathfrak{p}$. Пусть ad_X – линейный оператор в $\mathfrak{g} : \mathrm{ad}_X Y = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$. Если $\mathrm{ad}_{\hat{\Phi} X} = \mathrm{ad}_X \circ \hat{\Phi} \quad \forall X \in \mathfrak{k}$, то почти комплексная структура Φ на Q является интегрируемой (см. [7], глава 9), и Q является кэлеровым подмногообразием в M.

Поскольку эйлерова характеристика нечетномерных многообразий всегда равна нулю, то из теорем 2.6 и 2.12 вытекает следующий результат:

Следствие 3.3. *Пусть $M = G/H$ – однородное риманово пространство размерности $2n+1$, и Ad_H неприводимо действует на ортогональном дополнении подалгебры изотропии. Тогда на M не существует G-инвариантных аффинорных метрических структур.*

Поскольку n-мерная сфера S^n является редуктивным однородным римановым пространством $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$, и группа $\mathrm{SO}(n)$ действует на ортогональном относительно формы Киллинга-Картана дополнении подалгебры изотропии неприводимо, то получаем:

Теорема 3.4. *На n-мерной сфере $S^n, n \geqslant 2$, не существует $\mathrm{SO}(n+1)$-инвариантных аффинорных метрических структур с нетривиальным радикалом.*

Пусть (α, Φ, g) – G-инвариантная аффинорная метрическая структура на однородном пространстве M. По теореме Рисса (см. [10]) на M существует векторное поле $\xi : \alpha(X) = g(\xi, X)$ для любого векторного поля X на M. Векторное поле ξ называется *характеристическим векторным полем.* Имеем:

$$\alpha(\xi) = g(\xi, \xi), \ \alpha(X) = d\alpha(\xi, \Phi X).$$

Лемма 3.5. *Характеристическое векторное поле ξ G-инвариантной аффинорной метрической структуры обладает следующими свойствами:*

(1) *Если $x = g(o), g \in G$, то $dg^{-1}\xi_x = \xi_o$.*
(2) *Векторное поле ξ имеет постоянную длину.*
(3) *Для любого векторного поля X на M, $d\alpha(\xi, X) = -\frac{1}{2}\alpha([\xi, X])$.*

Доказательство. Свойство (1) вытекает из G-инвариантности 1-формы α и метрики g. Для любой точки $x \in M$ существует изометрия $g \in G : x = g(o)$. Получаем:

$$g_x(\xi, \xi) = g_o(dg^{-1}\xi, dg^{-1}\xi) = g_o(\xi, \xi) = \mathrm{const}.$$

Получаем, что длина векторного поля ξ не зависит от точки x. Это доказывает свойство (2).

Поскольку $d\alpha(\xi, \xi) = 0$ и $TM = \mathbb{R}\xi \oplus \ker \alpha$, то свойство (3) достаточно доказать для произвольного векторного поля $X \in \ker \alpha$. В силу свойства (2),

$$X(\alpha(\xi)) = X(g(\xi, \xi)) = 0.$$

Тогда:

$$d\alpha(\xi, X) = \frac{1}{2}\left(\xi(\alpha(X)) - X(\alpha(\xi)) - \alpha([\xi, X])\right) = -\frac{1}{2}\alpha([\xi, X]).$$

□

Когда характеристическое векторное поле ξ является киллинговым векторным полем, аффинорная метрическая структура (α, Φ, g) называется *K-аффинорной метрической структурой.* Важные свойства K-аффинорных метрических структур получены в [2]. В общем случае характеристическое векторное поле может не пренадлежать радикалу 1-формы α.

Определение 3.6. Аффинорная метрическая структура (α, Φ, g) называется строгой, если ее характеристическое векторное поле лежит в $\mathrm{rad}\alpha$.

Теорема 3.7. *Пусть $M = G/H$ – однородное риманово пространство и (α, Φ, g) – G-инвариантная аффинорная метрическая структура на M с характеристическим векторным полем ξ. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *(α, Φ, g) – строгая аффинорная метрическая структура.*

(2) *$\mathrm{L}_\xi\, \alpha = 0$, где L_ξ – производная Ли в направлении векторного поля ξ.*

(3) *ξ является геодезическим векторным полем, то есть, $\nabla_\xi \xi = 0$, где ∇ – связность Леви-Чивита римановой метрики g.*

Доказательство. Из свойства (2) леммы 3.5 следует, что $\alpha(\xi) = g(\xi, \xi) = \mathrm{const}$. Применяя выражение для производной Ли внешней p-формы в направлении векторного поля X $\mathrm{L}_X = d\,\mathrm{I}_X + \mathrm{I}_X\, d$ (см. [7], том 1) получаем:

$$\mathrm{L}_\xi\, \alpha = d\alpha(\xi) + \mathrm{I}_\xi\, d\alpha = \mathrm{I}_\xi\, d\alpha.$$

Получаем эквивалентность (1) и (2).

Пусть ∇ – связность Леви-Чивита метрики G. Для любых векторных полей X, Y, Z на M имеем:

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X. \tag{3.1}$$

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \tag{3.2}$$

Из равенства (3.2) следует, что $g(\nabla_X \xi, \xi) = 0$ для любого векторного поля X на M. В частности $g(\nabla_\xi \xi, \xi) = 0$. Используя свойство (3) леммы 3.5, а также равенства (3.1) и (3.2), для любого $X \in \ker \alpha$ получаем:

$$\begin{gathered} 0 = g(\nabla_\xi \xi, X) + g(\xi, \nabla_\xi X) = g(\nabla_\xi \xi, X) + g(\xi, \nabla_X \xi) + \\ + g(\xi, [\xi, X]) = g(\nabla_\xi \xi, X) + \alpha([\xi, X]) = g(\nabla_\xi \xi, X) - 2\, d\alpha(\xi, X). \end{gathered}$$

Получаем, что для любого векторного поля Y на M

$$g(\nabla_\xi \xi, Y) = 2\, d\alpha(\xi, Y).$$

Это доказывает эквивалентность (1) и (3).

Эквивалентность (2) и (3) следует из транзитивности последовательности

$$(2) \leftrightarrow (1) \leftrightarrow (3).$$

□

Замечание 3.8. Если g – фиксированная инвариантная риманова метрика на однородном пространстве M, то по теореме 3.7 классификация всех строгих инвариантных аффинорных метрических структур (α, Φ, g) сводится к классификации геодезических векторных полей на M и комплексных структур на слоях рабочего расслоения D, сохраняющих ограничение 2-формы $d\alpha$ на D и ориентацию слоев рабочего расслоения. Классификация инвариантных римановых метрик на однородном пространстве сводится к разложению ортогонального дополнения подалгебры изотропии $\mathfrak{h}$ в сумму Ad_H-неприводимых компонент (см. [6]).

4. Инвариантные субкэлеровы структуры

Пусть M – однородное риманово пространство размерности $n \geqslant 3$, g – риманова метрика на M, G – группа изометрий, действующая на M транзитивно и эффективно, и H – подгруппа изотропии начальной точки o. Будем считать, что алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{p}$ – Ad_H-инвариантное ортогональное дополнение подалгебры изотропии $\mathfrak{h}$.

Определение 4.1. Субкэлеровой структурой на однородном пространстве M называется четверка (Q, D, J, h), где D – голономное распределение касательных подпространств на M, Q – интегральное подмногообразие в M, проходящее через начальную точку $O : D|_Q = TQ$, h – скалярное произведение на D, а J – комплексная структура на $Q : J^*h = h$ и h есть кэлерова метрика на Q.

Из примера 3 в разделе 3 следует, что субкэлерову структуру на однородном римановом пространстве можно задать с помощью аффинорной метрической структуры. Однако субкэлерову структуру можно определить и отдельно.

Пример 1. Пусть G – неунимодулярная связная группа Ли размерности $n \geqslant 3$, $S^1 = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$, $M = G \times S^1$ и Z – левоинвариантное векторное поле на S^1. Положим: $[X, Y] = [X, Y]_G \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Z] = \mathrm{tr}[\mathrm{ad}_X]Z \quad \forall X \in \mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{u}$ – унимодулярное ядро в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{u}$ есть идеал в $\mathfrak{g}$. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует вектор $\xi : \mathrm{tr}[\mathrm{ad}_\xi] = 1$. Поскольку $[\xi, Z] = Z$, то вектора ξ и Z порождают двумерную подалгебру D. Групповая операция на M имеет вид:

$$(g_1, h_1)\dot{(}g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 exp(\det[\mathrm{Ad}_{g_1}] \ln(h_2)).$$

Зададим на M левоинвариантную 1-форму $\alpha : \alpha(Z) = 1, \alpha(X) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$. Имеем:

$$d\alpha(\xi, Z) = -\frac{1}{2}\,\alpha([\xi, Z]) = -\frac{1}{2}.$$

Подалгебра D порождает связную подгруппу $Q = \exp(D)$. На D существует единственная, сохраняющая ориентацию, левоинвариантная комплексная структура $J : J^*d\alpha = d\alpha$. Поскольку любая комплексная структура на двумерной подалгебре является комплексной структурой на соответствующей подгруппе (см. [7], том 2), то Q есть комплексная подгруппа в M. Задав кэлерову метрику h на Q как:

$$h(X, Y) = d\alpha(X, JY) \quad \forall X, Y \in D,$$

получим субкэлерову структуру (Q, D, J, h).

Аффинорная метрическая структура (α, Φ, g) на M с рабочим расслоением D называется *субкэлеровой*, если в M существует кэлерово подмногообразие Q, проходящее через начальную точку o, такое, что $D|_Q = TQ$, ограничение аффинора Φ на Q есть комплексная структура на Q и $d\alpha_\Phi$ есть кэлерова метрика на Q. Нашей задачей является выяснить, когда аффинорная метрическая структура на M определяет субкэлерову структуру на M.

Теорема 4.2. *Пусть $M = G/H$ – однородное риманово пространство, $\mathfrak{p}$ – Ad_H-инвариантное дополнение подалгебры изотропии $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и (α, Φ, g) – G-инвариантная аффинорная метрическая структура на M с рабочим расслоением D. Если выполняется одно из условий:*

(1) $D \subset \ker \alpha$.

(2) *Подпространство $\mathfrak{p}$ не содержит комплексных векторных подпространств.*

(3) (α, Φ, g) – *строгая аффинорная метрическая структура.*

Тогда аффинорная метрическая структура (α, Φ, g) не является субкэлеровой.

Доказательство. Предположим, что в M существует кэлерово подмногообразие Q, проходящее через начальную точку $o : TQ = D|_Q$, ограничение Φ на Q есть комплексная структура на Q и ограничение $d\alpha_\Phi$ на Q есть кэлерова метрика. Если выполнено условие (1), то по теореме 3.2 рабочее расслоение D является неголономным распределением на M. Для любой точки $x \in M$ существует $g \in G : g(o) = x$. Поскольку 1-форма α является G-инвариантной и $\mathrm{rad}\alpha_o$ ортогонален $T_oQ = D_o$, то $\mathrm{rad}\alpha_x$ ортогонален $T_xg(Q) = D_x$, т. е. $g(Q)$ – интегральное подмногообразие, проходящее через точку x. Получаем, что распределение D является голономным, и приходим к противоречию.

Пусть τ – линейный изоморфизм $\mathfrak{p} \mapsto T_oM$. Поскольку ограничение Φ на Q есть комплексная структура на Q и $T_oQ = D_o$, то $\tau^{-1}D_o$ есть комплексное подпространство в $\mathfrak{p}$. Если выполняется условие (2), то также получаем противоречие.

Пусть ξ – характеристическое векторное поле аффинорной метрической структуры (α, Φ, g). Если выполняется условие (3), то ξ ортогонально $\ker\alpha$ и ξ ортогонально D. Поскольку $\mathrm{rank}(\ker\alpha) \geqslant \mathrm{rank}(D)$, то $D \subseteq \ker\alpha$. По теореме 3.2 D – неголономное распределение на M. Также как для условия (1) получаем, что D является голономным распределением и снова приходим к противоречию. □

В [2] введено понятие нормальной аффинорной метрической структуры на группе Ли. Левоинвариантная аффинорная метрическая структура (α, Φ, g) на группе Ли G называется *нормальной*, если

$$\mathrm{ad}_{\Phi X} = \mathrm{ad}_X \circ \Phi,$$

для любого векторного поля X, лежащего в рабочем расслоении D. Пусть $\mathfrak{k}$ – рабочее расслоение нормальной аффинорной G-левоинвариантной H-правоинвариантной метрической структуры $(\hat{\alpha}, \hat{\Phi}, \hat{g})$ на группе G. Поскольку $\mathfrak{k}$ ортогонально $\mathrm{rad}\hat{\alpha}$ и $\mathfrak{p}$ ортогонально $\mathfrak{h} \subseteq \mathrm{rad}\hat{\alpha}$, то $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{p}$. Если $\mathfrak{k}$ является подалгеброй, то, в силу следствия 2.7, $\mathfrak{k}$ имеет четную размерность и порождает подгруппу $K = \exp(\mathfrak{k})$ в группе G. Ограничение аффинора $\hat{\Phi}$ на подгруппу K есть G-левоинвариантная H-правоинвариантная комплексная структура на подгруппе K (см. [7], глава 9). Поскольку ограничение метрики $\hat{g}$ на K имеет фундаментальную 2-форму $d\hat{\alpha}$ и внешняя 2-форма $d\hat{\alpha}$ невырождена на $\mathfrak{k}$, то Подгруппа K является интегральным кэлеровым подмногообразием для рабочего расслоения $\mathfrak{k}$. Рабочее расслоение $\mathfrak{k}$ на группе G задает G-инвариантное рабочее расслоение D на однородном пространстве M для G-инвариантной аффинорной метрической структуры на M порожденной аффинорной метрической структурой $(\hat{\alpha}, \hat{\Phi}, \hat{g})$ на группе G. Следовательно, нормальная аффинорная метрическая структура $(\hat{\alpha}, \hat{\Phi}, \hat{g})$ на группе G порождает G-инвариантную аффинорную метрическую структуру на однородном пространстве M с интегральным кэлеровым подмногообразием $Q = K(o)$, проходящим через начальную точку $o : T_oQ = D_o$. Таким образом получаем следующий результат:

Теорема 4.3. *Пусть $M = G/H$ – однородное риманово пространство вещественной размерности $n \geqslant 3$. Любая G-левоинвариантная H-правоинвариантная нормальная аффинорная метрическая структура на группе Ли G с рабочим* *расслоением $\mathfrak{k}$ порождает G-инвариантную субкэлерову аффинорную структуру на M тогда и только тогда, когда $\mathfrak{k}$ является инволютивным распределением в ортогональном дополнении подалгебры изотропии $\mathfrak{h}$.*

Будем говорить, что комплексная структура J на подгруппе $Q \subset G$ ассоциирована с аффинором Φ на группе Ли G, если ограничение Φ на Q совпадает с комплексной структурой J на Q, т. е. является интегрируемой почти комплексной структурой на подгруппе Q. Фактически, в теореме 4.3 условие нормальности аффинорной метрической структуры необходимо только для того, чтобы рабочее расслоение порождало подгруппу с комплексной, а не с почти комплексной структурой. Таким образом, получаем более сильное утверждение:

Теорема 4.4. *Пусть $M = G/H$ – однородное риманово пространство вещественной размерности $n \geqslant 3$. Любая G-левоинвариантная H-правоинвариантная аффинорная метрическая структура (α, Φ, g) на группе G с рабочим расслоением $\mathfrak{k}$ задает G-инвариантную субкэлерову аффинорную структуру на M тогда и только тогда, когда $\mathfrak{k}$ является алгеброй Ли подгруппы K в G снабженной комплексной структурой ассоциированной с аффинором Φ.*

Замечание 4.5. Подгруппа K в теореме 4.4 это – подгруппа трансверсальная подгруппе изотропии и ее пересечение с подгруппой изотропии это – дискретная подгруппа в группе G.

5. Инвариантные аффинорные метрические структуры на однородных пространствах размерности 4

В этом разделе мы получим полное описание инвариантных аффинорных метрических структур на четырехмерных однородных римановых пространствах.

Пусть M – вещественное однородное риманово пространство размерности 4, G – группа изометрий, действующая на M транзитивно и эффективно, H – подгруппа изотропии начальной точки o и $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ – Ad_H-инвариантное ортогональное дополнение к подалгебре изотропии $\mathfrak{h}$ относительно некоторой левоинвариантной римановой метрики на группе G. Будем обозначать эйлерову характеристику компактного однородного пространства M через $\chi(M)$.

В [5] получена следующая классификация четырехмерных однородных римановых пространств:

Теорема 5.1. *Любое односвязное однородное риманово пространство размерности 4 либо изометрично группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой, либо изометрично одному из следующих симметрических пространств:*

$$S^4,\ S^2 \times S^2,\ S^3 \times \mathbb{R},\ S^2 \times \mathbb{R}^2,\ \mathbb{C}P^2.$$

По теореме 5.1 для однородных римановых пространств размерности 4 следует рассматривать два случая: симметрические четырехмерные пространства неизометричные какой-либо группе Ли и четырехмерные группы Ли. Полная классификация групп Ли размерности 4 приведена в [3].

5.1. Симметрические римановы пространства размерности 4.

Поскольку трехмерная сфера S^3 диффеоморфна группе $\mathrm{su}(2)$, то симметрическое пространство $S^3 \times \mathbb{R}$ можно рассматривать как группу Ли. Случай групп Ли будет рассмотрен отдельно далее. Имеем:

$$\chi(S^4) = 2,\ \chi(S^2 \times S^2) = 4,\ \chi(\mathbb{C}P^2) = 3.$$

По теореме 2.10 получаем, что симметрические пространства S^4, $S^2 \times S^2$ и $\mathbb{C}P^2$ не допускают инвариантных аффинорных метрических структур.

Пусть $M = S^2 \times \mathbb{R}^2$. Если G – группа изометрий пространства M, то $G = G_1 \times G_2$, где G_1 – группа изометрий сферы S^2, G_2 – группа изометрий евклидова пространства $\mathbb{R}^2$. Поскольку ограничение любой G-инвариантной 1-формы на S^2 есть G_1-инвариантная 1-форма на S^2, а на S^2 не существует ненулевых инвариантных 1-форм, то любая ненулевая G-инвариантная 1-форма на M есть G_2-инвариантная 1-форма на $\mathbb{R}^2$. Евклидово пространство $\mathbb{R}^2$ можно представить как однородное пространство только двумя способами: либо как аддитивную абелеву группу A_2, либо как пространство $\mathrm{E}(2)/\mathrm{SO}(2)$, где $\mathrm{E}(2)$ – группа движений евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Если $G_2 \cong \mathrm{E}(2)$, то единственная $\mathrm{E}(2)$-инвариантная 1-форма на $\mathbb{R}^2$ это – 1-форма $\alpha \equiv 0$. Если $G_2 = A_2$, то любая G_2-инвариантная 1-форма α на $\mathbb{R}^2$ имеет вид

$$\alpha = adx + bdy,\ a = \mathrm{const}, b = \mathrm{const}.$$

Откуда $d\alpha = 0$. Следовательно, любая G-инвариантная 1-форма на $S^2 \times \mathbb{R}^2$ либо замкнута, либо тождественно равна нулю. Таким образом получаем:

Теорема 5.2. *Если односвязное однородное риманово пространство $M = G/H$ размерности 4 не изометрично группе Ли с левоинвариантной метрикой, то на M не существует G-инвариантных аффинорных метрических структур.*

5.2. **Пространство $\mathbb{C}P^2$.** Комплексную проективную плоскость $\mathbb{C}P^2$ можно рассматривать как однородное пространство $\mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(2)$. По теореме 5.2, на $\mathbb{C}P^2$ не существует $\mathrm{SU}(3)$-инвариантных аффинорных метрических структур. Изучим вопрос существования на $\mathbb{C}P^2$ неинвариантных аффинорных метрических структур. В силу пункта (1) теоремы 2.6, любая аффинорная метрическая структура на $\mathbb{C}P^2$ может иметь либо радикал ранга 2, либо радикал ранга 0.

Положим $|Z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \neq 0,\ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$. Введем на $\mathbb{C}P^2$ 1-форму $\alpha = \bar{\partial} \ln |Z|^2$. Имеем:

$$d\alpha = \partial\bar{\partial} \ln |Z|^2.$$

Легко проверить, что внешняя 2-форма $d\alpha$ невырождена. Пусть J – комплексная структура на $\mathbb{C}P^2$ порожденная умножением на мнимую единицу. Тогда, $J^* d\alpha = d\alpha$ и определена кэлерова метрика $h : h(X, Y) = d\alpha(X, JY)$ для любых векторных полей X и Y. Получаем неинвариантную аффинорную метрическую структуру (α, J, h) с радикалом ранга 0.

Пусть $p_1(E)$ – первый класс Понтрягина векторного расслоения E. Если на $\mathbb{C}P^2$ существует 1-форма с радикалом ранга 2 и рабочим расслоением D, то касательное расслоение есть сумма Уитни подрасслоений D и $\mathrm{rad}\alpha$ ранга 2. Имеем:

$$p_1(\mathbb{C}P^2) = p_1(D) \wedge p_1(\mathrm{rad}\alpha) = 0.$$

Но это противоречит факту, что $p_1(\mathbb{C}P^2) \neq 0$. Следовательно, на $\mathbb{C}P^2$ не может существовать аффинорных метрических структур с радикалом ранга 2. Окончательно получаем:

Теорема 5.3. *На однородном римановом пространстве $\mathbb{C}P^2$ не существует аффинорных метрических структур с радикалом ранга 2, но существует неинвариантная аффинорная метрическая структура с радикалом ранга 0.*

5.3. **Группы Ли размерности 4.** Пусть G – группа Ли размерности 4, α – левоинвариантная незамкнутая 1-форма на группе G и β – левоинвариантная риманова метрика на G. Если $\operatorname{rank}(\mathrm{rad}\alpha) = 0$, то существует базис левоинвариантных векторных полей e_1, e_2, e_3, e_4, в котором $d\alpha$ принимает вид:

$$d\alpha = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*. \tag{5.1}$$

Если $\operatorname{rank}(\mathrm{rad}\alpha) = 2$, то существует базис левоинвариантных векторных полей e_1, e_2, e_3, e_4, в котором $d\alpha$ принимает вид:

$$d\alpha = e_1^* \wedge e_2^*. \tag{5.2}$$

Базис e_1, e_2, e_3, e_4 называется *каноническим базисом.* В [3] доказано, что любая левоинвариантная почти комплексная структура на группе G, положительно ассоциированная с внешней 2-формой вида (5.1), в каноническом базисе имеет вид:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -\frac{a^2+1}{b} & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & s \\ 0 & 0 & -\frac{r^2+1}{s} & -r \end{bmatrix},$$
$$b < 0,\ s < 0.$$

Аналогично, любой левоинвариантный аффинор, положительно ассоциированный с внешней 2-формой вида (5.2), в каноническом базисе имеет вид:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -\frac{a^2+1}{b} & -a & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots} & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots} & 0 \end{bmatrix},\ b < 0.$$

Положим $z_1 = a + bi$, $z_2 = r + si$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$, $\mathbb{C}^2_- = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Im} z_1 < 0, \operatorname{Im} z_2 < 0\}$. Получаем, что множество $\mathbb{C}^2_-$ параметризует множество всех левоинвариантных аффиноров и левоинвариантных метрик, ассоциированных с 1-формой $\alpha : \operatorname{rank}(\mathrm{rad}\alpha) = 0$; множество $\mathbb{C}_-$ параметризует множество всех левоинвариантных аффиноров, ассоциированных с 1-формой $\alpha : \operatorname{rank}(\mathrm{rad}\alpha) = 2$. Обозначим через $b_1(G)$ первое число Бетти группы G. Тогда множество всех незамкнутых левоинвариантных 1-форм на группе размерности 4 параметризуется точками пространства $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)}$. Из классификации алгебр Ли размерности 4 следует, что не существует полупростых групп Ли размерности 4 (см. [3]). Следовательно, на любой четырехмерной группе Ли существует хотябы одна левоинвариантная замкнутая 1-форма отличная от нулевой. Если группа G некоммутативна, то $b_1(G) \geqslant 1$, $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)}$ есть открытое множество в $\mathbb{R}^4$ и $\dim(\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)}) = 4$. Таким образом, получаем:

Теорема 5.4. *Пусть G – некоммутативная группа Ли вещественной размерности 4. Тогда:*

(1) *Пространство левоинвариантных аффинорных метрических структур с радикалом ранга 0 (точных почти кэлеровых структур) на группе G параметризуется элементами множества $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)} \times \mathbb{C}^2_-$ и имеет вещественную размерность 8.*

(2) *Пространство левоинвариантных аффинорных метрических структур с радикалом ранга 2 на группе G параметризуется элементами множества $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)} \times \mathbb{C}_-$ и имеет вещественную размерность 6.*

Замечание 5.5. На коммутативной группе Ли любая левоинвариантная 1-форма является замкнутой, а следовательно на коммутативной группе Ли не существует левоинвариантных аффинорных метрических структур.

Пусть (α, Φ, g) – левоинвариантная аффинорная метрическая структура на связной группе Ли G вещественной размерности 4, $\operatorname{rank}(\operatorname{rad}\alpha) = 2$ и D – рабочее расслоение этой аффинорной метрической структуры. Если D – подалгебра в $\mathfrak{g}$, то либо D – абелева подалгебра размерности 2, либо D изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{e}(1)$ группы $\mathrm{E}(1)$ аффинных преобразований вещественной прямой $\mathbb{R}$. Если D – абелева подалгебра, то $d\alpha|_D = 0$, что противоречит условию невырожденности 1-формы α на рабочем расслоении. Следовательно, $D \cong \mathfrak{e}(1)$. Тогда в D можно выбрать левоинвариантные векторные поля $e_1, e_2 : [e_1, e_2] = e_2$. Поскольку любая почти комплексная структура на многообразии вещественной размерности 2 является интегрируемой (см. [7], том 2), то ограничение аффинора Φ на подгруппу $\mathrm{E}(1)$ является комплексной структурой на $\mathrm{E}(1)$, а $d\alpha_\Phi$ является кэлеровой метрикой на $\mathrm{E}(1)$. Получаем следующий результат:

Теорема 5.6. *Левоинвариантная аффинорная метрическая структура* $(\alpha, \Phi, g) : \operatorname{rank}(\operatorname{rad}\alpha) = 2$ *на связной группе Ли вещественной размерности 4 с рабочим расслоением D является субкэлеровой тогда и только тогда, когда в D существуют линейно независимые левоинвариантные векторные поля* $e_1, e_2 : [e_1, e_2] = e_2$.

6. Инвариантные аффинорные метрические структуры на однородных пространствах размерности 5

Пусть M – однородное риманово пространство вещественной размерности 5, G– группа изометрий, действующая на M транзитивно и эффективно, и H – подгруппа изотропии начальной точки o. По теореме 2.6 ранг любой незамкнутой G-инвариантной 1-формы на M может быть равен 1 или 3. Аффинорные метрические структуры на пятимерном однородном пространстве M есть в точности почти контактные метрические структуры на M. Из теоремы 2.12 и замечания 2.13 получаем:

Теорема 6.1. *Пусть $M = G/H$ – однородное риманово пространство размерности 5, $\mathfrak{p}$ – ортогональное дополнение к подалгебре изотропии $\mathfrak{h}$, и Ad_H действует на $\mathfrak{p}$ неприводимо. Тогда на M не существует G-инвариантных аффинорных (почти контактных) метрических структур.*

Теорема 6.2. *Если однородное риманово пространство $M = G/H$ размерности 5 изометрично однородному пространству $M_1 \times L$, где M_1 – односвязное риманово однородное пространство размерности 4 неизометричное группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой, L – однородное пространство размерности 1, то на M не существует G-инвариантных аффинорных (почти контактных) метрических структур.*

Доказательство. Поскольку $G = G_1 \times G_2$, где G_1 – группа Ли, транзитивно действующая на M_1, G_2 – группа Ли, транзитивно действующая на L, то из теорем 5.1 и 5.2 следует, что любая незамкнутая G-инвариантная 1-форма α на M имеет вид:

$$\alpha = \lambda\xi^*,$$

где ξ – базисное векторное поле на $L : \xi^*|_M = 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Получаем:

$$d\alpha = \lambda d\xi^* = 0,$$

то есть, любая G-инвариантная 1-форма на M является замкнутой. Следовательно, на M не существует G-инвариантных аффинорных метрических структур. □

6.1. **Пятимерная сфера.** Будем рассматривать пятимерную сферу S^5 как множество в $\mathbb{C}^3$:

$$\{(z_1, z_2, z_3) : |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1\}.$$

Определим действие группы $S^1 = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ на S^5 следующим образом:

$$e^{it}(z) = (e^{it}z_1, e^{it}z_2, e^{it}z_3).$$

Векторное поле, касательное к орбите действия группы S^1 на S^5, не обращается в 0 во всех точках из S^5, следовательно, S^5 имеет нулевой класс Эйлера (см. [9]). Если сферу S^5 рассматривать как однородное пространство SO(6)/SO(5), то S^5 есть однородное риманово пространство и по теореме 6.1 на S^5 не существует SO(6)-инвариантных аффинорных метрических структур.

Рассмотрим сферу S^5 как тотальное пространство расслоения Хопфа $S^5 \to \mathbb{C}P^2$ со слоем S^1. В этом случае группа S^1 действует на S^5 нетранзитивно. Пусть Q – некоторая связность на S^5, а ω – форма связности Q. Из определения формы связности на главном расслоении (см. [7], том 1) следует, что Ω – S^1-инвариантная 1-форма на S^5. Пусть Ω – форма кривизны связности Q. Из структурного уравнения:

$$d\omega = \Omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

получаем, что $d\omega = \Omega$. Форма связности ω является замкнутой тогда и только тогда, когда связность Q является плоской. Предположим, что связность Q не является плоской, g – риманова метрика, индуцированная вложением сферы S^5 в $\mathbb{C}^3$, и Φ – аффинор, ассоциированный с формой связности ω. Тогда (ω, Φ, g) есть S^1-инвариантная аффинорная (почти контактная) метрическая структура на S^5. Если ограничение формы кривизны связности Ω на $\mathbb{C}P^2$ является симплектической формой, то (ω, Φ, g) есть S^1-инвариантная контактная метрическая структура на S^5.

6.2. **Произведения трехмерной сферы.** Пусть $M = S^3 \times R$, где R – однородное риманово пространство вещественной размерности 2, и G – группа изометрий, действующая на M транзитивно и эффективно. Если α – G-инвариантная 1-форма на $M : TR \subset \ker\alpha$, то для любых векторных полей X, Y на R $\alpha([X, Y]) = 0$. Поскольку, для любого векторного поля X на R и любого векторного поля Y на M $[X, Y] = 0$ и 1-форма α является G-инвариантной, то $d\alpha(X, Y) = 0$ для любого векторного поля X на R и любого векторного поля Y на M. Поскольку трехмерная сфера S^3 изометрична группе SU(2), а алгебра Ли группы SU(2) изоморфна $\mathbb{R}^3$ с операцией векторного произведения, то на SU(2) существуют три линейно независимые левоинвариантные 1-формы с радикалом ранга 1. Считая, что эти 1-формы тождественно равны нулю на R, и выбирая в качестве метрики сумму метрики на S^3 и метрики на R, получаем, что на M существуют G-инвариантные аффинорные метрические структуры с радикалом ранга 3. Отсюда следует, что каждая левоинвариантная контактная метрическая структура на $\mathrm{SU}(2)$ определяет G-инвариантную аффинорную метрическую структуру с радикалом ранга 3 на следующих однородных пространствах:

$$S^3 \times S^2,\ S^3 \times \mathbb{R}^2,\ S^3 \times T^2,$$

где T^2 – двумерный плоский тор.

6.3. **Группы Ли размерности 5.** Пусть G – группа Ли вещественной размерности 5 и α – левоинвариантная незамкнутая 1-форма на группе G. Из теоремы 2.6 следует, что внешняя 2-форма $d\alpha$ в некотором базисе левоинвариантных векторных полей $e_1, \dots, e_5$ принимает либо вид

$$d\alpha = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*,$$

либо вид

$$d\alpha = e_1^* \wedge e_2^*.$$

В обоих случаях левоинвариантный аффинор ассоциированный с 1-формой α в каноническом базисе имеет вид

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где A – ненулевой блок 4×4 или 2×2.

Пусть $b_1(G)$ – первое число Бетти группы G. Множество всех незамкнутых левоинвариантных 1-форм на группе G параметризуется элементами множества $\mathbb{R}^5 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)}$. Определяя множества $\mathbb{C}_-, \mathbb{C}_-^2$ и рассуждая так же как в разделе 5.3, получаем следующее описание левоинвариантных аффинорных метрических структур на группе G:

Теорема 6.3. *Пусть G – некоммутативная группа Ли вещественной размерности 5. Тогда:*

(1) *Пространство левоинвариантных аффинорных метрических структур с радикалом ранга 1 на группе G параметризуется элементами множества $\mathbb{R}^5 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)} \times \mathbb{C}_-^2$ и имеет вещественную размерность 9.*

(2) *Пространство левоинвариантных аффинорных метрических структур с радикалом ранга 3 на группе G параметризуется элементами множества $\mathbb{R}^5 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)} \times \mathbb{C}_-$ и имеет вещественную размерность 7.*

Строгая аффинорная метрическая структура с радикалом ранга 1 это – контактная метрическая структура. Левоинвариантные контактные метрические структуры на группах Ли размерности 5 полностью описаны в [4].

6.4. **Группы Ли произвольной размерности.** Пусть G – группа Ли вещественной размерности $n \geqslant 3$, α – левоинвариантная незамкнутая 1-форма на группе G и $\mathrm{rank}(\mathrm{rad}\alpha) = r \leqslant n - 2$. В силу следствия 2.7 существует целое число $k : n - r = 2k$. Обозначим через $\mathbb{C}_-^k$ следующее множество:

$$\{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k : \mathrm{Im}\, z_1 < 0, \dots, \mathrm{Im}\, z_k < 0\}.$$

Обобщая теоремы 5.4 и 6.3 для группы Ли произвольной размерности можно доказать следующий результат:

Теорема 6.4. *Пусть G – некоммутативная группа Ли вещественной размерности $n \geqslant 3$ и $b_1(G)$ – первое число Бетти группы G. Тогда пространство левоинвариантных аффинорных метрических структур с радикалом ранга r на группе G параметризуется элементами множества*

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)} \times \mathbb{C}_-^k, \quad k = \frac{n-r}{2},$$

и имеет вещественную размерность $n + 2k$.

Пусть α – ненулевая левоинвариантная 1-форма на группе G и β – левоинвариантная риманова метрика на G. По теореме Рисса (см. [10]) на группе G существует левоинвариантное векторное поле $\xi : \alpha(X) = \beta(\xi, X) \quad \forall X \in \mathfrak{g}$. Для любых левоинвариантных векторных полей X, Y на группе G имеем:

$$d\alpha(X,Y) = -\frac{1}{2}\alpha([X,Y]) = -\frac{1}{2}\beta(\xi,[X,Y]).$$

Если G – полупростая группа Ли, то 1-форма α не может быть замкнутой, поскольку $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Таким образом получаем:

Следствие 6.5. *Пусть G – полупростая группа Ли вещественной размерности $n \geqslant 3$. Тогда пространство левоинвариантных аффинорных метрических структур с радикалом ранга r на группе G параметризуется элементами множества*

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{C}_-^k, \quad k = \frac{n-r}{2},$$

и имеет вещественную размерность $2n - r$.

Замечание 6.6. Поскольку первый производный идеал радикала левоинвариантной аффинорной метрической структуры на группе Ли является подалгеброй, ортогональной характеристическому векторному полю, то левоинвариантная аффинорная метрическая структура с полупростым радикалом не может быть строгой.

Список литературы

[1] *G. Calvaruso* Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures // Journal of Geometry and Physics, 2013, Vol. 69, P. 60–73.

[2] *Е. С. Корнев* Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли // Сиб. матем. журн., 2012, т. 53, № 1 с. 107–123.

[3] *Е. С. Корнев* Почти комплексные структуры и ассоциированные метрики на группах Ли размерности 4 // Lambert Academic Publishing, Саарбрюкен, 2010.

[4] *Я. В. Славолюбова* Левоинвариантные контактные метрические структуры на группах Ли // Lambert Academic Publishing, Саарбрюкен, 2011.

[5] *Л. Берар-Бержери* Однородные римановы пространства размерности 4 // В книге "Четырехмерная риманова геометрия: семинар Артура Бессе 1978/79 г. с. 45–59., Мир, М., 1985.

[6] *А. Бессе* Многообразия Эйнштейна (в 2-х т.) // Мир, М., 1990.

[7] *Ш. Кобаяси, К. Намидзу* Основы дифференциальной геометрии (в 2-х т.) // Наука, М., 1981.

[8] *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* Римановы многообразия и однородные геодезические // Серия "Итоги науки. Юг России. Математическая монография."Вып. 4, Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ, 2012.

[9] *Милнор Дж., Сташеф Дж.* Характеристические классы // Мир, М., 1979.

[10] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа // Наука, М., 1981.

Корнев Евгений Сергеевич
Кафедра фундаментальной математики кемеровского государственного университета
Кемерово, Красная, 6
q148@mail.ru

Славолюбова Ярославна Викторовна
Кафедра высшей и прикладной математики Кемеровского института (филиала) РЭУ им. Г. В. Плеханова
Кемерово, проспект Кузнецкий, 39
jar1984@mail.ru