УДК 514.763

Е. С. Корнев

Радикал левоинвариантных 1-форм на группах Ли

Вводится и изучается понятие радикала левоинвариантных 1-форм на группах Ли. Описывается связь радикала с геометрией групп Ли и различными левоинвариантными структурами. Дано полное описание пространств 1-форм со всеми возможными типами радикала на группах Ли размерности 3 и 4. Дано описание применения радикала 1-форм для построения субримановых, аффинорных и почти контактных структур на группах Ли.

Ключевые слова: радикал 1-формы, субриманова структура, почти контактная структура, группы Ли.

§ 1. Введение

Пусть M – многообразие класса C^∞ и Ω – линейная форма класса C^∞ степени $p \geqslant 2$ на M. Радикалом формы Ω на M обычно называют распределение векторных подпространств R на $M : I_X\Omega = 0 \quad \forall X \in C^\infty$. Здесь $I_X\Omega$ означает внутреннее произведение сечения X и p-формы Ω. Форма Ω является невырожденной на M тогда и только тогда, когда радикал r является тривиальным нулевым распределением. Мы определяем радикал 1-формы α на M как радикал её внешнего дифференциала $d\alpha$. В классическом случае широко изучаются случаи, когда $d\alpha$ имеет радикал размерности 0 (точная симплектическая структура) или 1 (контактная структура). Риманова геометрия симплектических и контактных многообразий описана в [1]. Нас интересует общий случай, когда радикал $d\alpha$ имеет произвольную размерность.

В случае произвольного многообразия M радикал внешней 2-формы $d\alpha$ может иметь в разных точках разную размерность. Однако на группах Ли левоинвариантная 1-форма всегда имеет радикал постоянного ранга, который порождается своим значением в единице группы. Более того, радикал левоинвариантной 1-формы является подалгеброй в алгебре Ли группы Ли. В [5] показано, что любая левоинвариантная 1-форма α с нетривиальным радикалом на группе Ли размерности $\geqslant 3$ порождает симплектическую группу Ли с симплектической структурой $d\alpha$. Кроме того, 1-форма с нетривиальным радикалом на группе Ли порождает ассоциированные римановы и субримановы структуры (см. [5]) аналогично контактным метрическим структурам. Метрическая структура, ассоциированная с 1-формой, имеющей радикал произвольной размерности, называется *аффинорной метрической структурой*. Аффинорные

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00873-а) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-4382.2014.1).

метрические структуры в самом общем случае изучены в [6]. На многообразиях нечетной размерности аффинорные метрические структуры есть в точности *почти контактные метрические структуры*. Почти контактные метрические структуры на группах Ли размерности 3 классифицированы в [3]. В данной работе мы опишем важные свойства радикала левоинвариантных 1-форм на группах Ли и дадим полную классификацию левоинвариантных 1-форм на группах Ли размерности 3 и 4 в зависимости от размерности радикала.

В первом разделе мы докажем некоторые важные свойства радикала левоинвариантных 1-форм на группах Ли. Затем мы отдельно рассмотрим радикал левоинвариантных 1-форм на нильпотентных группах Ли. В разделах 4 и 5 мы дадим полное описание пространств левоинвариантных 1-форм с радикалом любой допустимой размерности на группах Ли размерности 3 и 4. В последнем разделе мы дадим описание того, как понятие радикала 1-формы позволяет получать различные важные геометрические структуры на группах Ли.

§ 2. Радикал левоинвариантных 1-форм

Пусть G – связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли и Ω – полилинейная форма на группе G. Форма Ω называется левоинвариантной, если $L_g^*\Omega_g = \Omega_e \quad \forall g \in G$, где e – единица группы G, а L_g^* – кодифференциал левого сдвига на элемент g. Пусть $A_g : G \mapsto G : A_g(x) = g^{-1}xg$ – внутренний автоморфизм группы G. Тогда на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определены отображения $\operatorname{Ad}_g = dA_g$ и $\operatorname{ad}_X : \operatorname{ad}_X Y = [X,Y] \quad X, Y \in \mathfrak{g}$. Если g_t – однопараметрическая подгруппа, порождённая векторным полем X, то для любого $Y \in \mathfrak{g}$

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \operatorname{Ad}_{g_t} Y = \operatorname{ad}_X Y = [X,Y],$$

а отображение Ad_g есть автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ для любого элемента $g \in G$ (см. [8]).

Пусть α – левоинвариантная 1-форма на группе Ли G. Из инвариантного определения внешнего дифференциала (см. [9]) получаем:

$$d\alpha(X,Y) = -\frac{1}{2}\alpha([X,Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что $d\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \ker\alpha$. В частности, если G – коммутативная группа Ли, то любая левоинвариантная 1-форма на G является замкнутой. Если G – простая группа Ли, то на G не существует нетривиальных замкнутых левоинвариантных 1-форм.

Определение 2.1. Радикалом 1-формы α на группе Ли G называется подпространство

$$\operatorname{rad}\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : I_X d\alpha = 0\},$$

где $I_X d\alpha$ есть внутреннее произведение векторного поля X и внешней 2-формы $d\alpha$.

Сразу из определения вытекают следующие очевидные свойства радикала:

Предложение 2.2. *Пусть G – связная группа Ли и $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли.*

(1) Левоинвариантная 1-форма α на G является замкнутой тогда и только тогда, когда $\operatorname{rad}\alpha = \mathfrak{g}$.

(2) если α – левоинвариантная незамкнутая 1-форма на G, а η – замкнутая левоинвариантная 1-форма на G, то

$$\operatorname{rad}\alpha = \operatorname{rad}(\lambda\alpha + \eta) \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \neq 0.$$

(3) Если G – некоммутативная группа Ли и $\mathfrak{c}$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то для любой левоинвариантной 1-формы α на G $\mathfrak{c} \subseteq \operatorname{rad}\alpha$.

(4) Если α, β – линейнонезависимые незамкнутые левоинвариантные 1-формы и $\operatorname{rad}\alpha \neq \operatorname{rad}\beta$, то $\operatorname{rad}(a\alpha + b\beta) < \mathfrak{g} \quad a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 \neq 0$.

(5) Если A – автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и α – левоинвариантная 1-форма на группе G, то $\operatorname{rad}(A^*\alpha) = a^{-1}\operatorname{rad}\alpha$.

В [5] доказано, что радикал левоинвариантной 1-формы α на группе Ли G является подалгеброй в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и порождает связную подгруппу $R = \exp(\operatorname{rad}\alpha)$, называемую *подгруппой радикала*, которая совпадает с компонентой связности единицы стабилизатора 1-формы α относительно присоединенного действия группы G. Т. е. $\operatorname{Ad}^*_R \alpha = \alpha$.

Предложение 2.3. *Если подгруппа радикала левоинвариантной 1-формы α на связной группе Ли G является нормальной подгруппой в G, то для любого $g \in G$ $\operatorname{rad}(\operatorname{Ad}^*_g \alpha) = \operatorname{rad}\alpha$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{r}$ радикал 1-формы α, а через $\mathfrak{h}_g$ радикал 1-формы $\operatorname{Ad}^*_g \alpha$. Подалгебры $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{h}_g$ порождают подгруппы R и H_g соответственно. Поскольку подгруппа R является нормальной, то для любого $g \in G$ имеем:

$$\begin{aligned} A_g R &= R, \\ \operatorname{Ad}^*_R(\operatorname{Ad}^*_g \alpha) &= \operatorname{Ad}^*_{Rg} \alpha = \operatorname{Ad}^*_{gR} \alpha = \\ &= \operatorname{Ad}^*_g(\operatorname{Ad}^*_R \alpha = \operatorname{Ad}^*_g \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда $R \subset H_g$.

Поскольку для любого $g \in G$ Ad_g есть автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то по свойству (5) предложения 2.2 имеем:

$$\dim(\operatorname{rad}(\operatorname{Ad}^*_g \alpha)) = \dim(\operatorname{rad}\alpha). \tag{2.2}$$

Предположим, что в H_g существует элемент $h : h \notin R$. Поскольку группа G является связной, то в G существует кривая $\gamma(t) : \gamma(0) = e,\ \gamma(1) = g$. Касательный вектор к этой кривой в единице порождает левоинвариантное векторное поле в алгебре Ли $\mathfrak{h}_g$, трансверсальное к подалгебре $\mathfrak{r}$. Но это противоречит условию (2.2). Следовательно, $R = H_g$ и $\operatorname{rad}(\operatorname{Ad}^*_g \alpha) = \operatorname{rad}\alpha$.

Группа $\operatorname{aut}(\mathfrak{g})$ стандартным образом действует на пространствах $\wedge^k \mathfrak{g}^*$ при любом $k \in \mathbb{N}$. Будем считать 1-формы α и β эквивалентными, если существует замкнутая 1-форма $\eta : \alpha = \beta + \eta$. Очевидно, что $\operatorname{rad}\alpha = \operatorname{rad}\beta$, если $\alpha \sim \beta$. Будем обозначать пространство классов эквивалентности всех левоинвариантных

1-форм на группе G с радикалом размерности r через $U^r(G)$. Из свойств (4) и (5) предложения 2.2 следует, что пространство $U^r(G)$ не является линейным пространством, но инвариантно относительно действия группы $\mathrm{aut}(\mathfrak{g})$. Так как $\mathrm{Ad}_g \in \mathrm{aut}(\mathfrak{g}) \quad \forall g \in G$, то пространства $U^r(G)$ являются Ad_G-инвариантными. Если $H^2(G\,\mathbb{R}) = 0$, то любая левоинвариантная замкнутая 2-форма на группе G является внешним дифференциалом некоторой левоинвариантной 1-формы. Следовательно, существует число $r < \dim(G) : U^r(G) \neq \emptyset$.

Предложение 2.4. *На группе Ли размерности 2 любая левоинвариантная 1-форма допускает только радикал размерности 0 или 2.*

Доказательство. Пусть G – связная группа Ли размерности 2. Если G – коммутативная группа, то любая левоинвариантная 1-форма на G является замкнутой, следовательно имеет радикал размерности 2.

Если G – некоммутативная группа, то в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ можно выбрать базис $e_1, e_2 : [e_1, e_2] = e_2$. Любая левоинвариантная 1-форма α в этом базисе имеет вид:

$$\alpha = ae_1^* + be_2^*, A^2 + b^2 \neq 0.$$

Используя равенство (2.1), получаем:

$$\mathrm{rad}\, e_1^* = \mathfrak{g},\ \mathrm{rad}\, e_2^* = \{0\}.$$

При $b = 0$ имеем $\dim(\mathrm{rad}\,\alpha) = 2$. При $b \neq 0$ из свойства (4) предложения 2.2 получаем $\dim(\mathrm{rad}\,\alpha) = 0$.

Для групп Ли размерности не меньше 3 в [5] доказан следующий результат:

Теорема 2.5. *Пусть G – связная группа Ли размерности $n \geqslant 3$ и α – незамкнутая левоинвариантная 1-форма на G с радикалом размерности r. Тогда:*

(1) Если n четно, то r также четно и $0 \leqslant r \leqslant n-2$.
(2) Если n нечетно, то r также нечетно и $1 \leqslant r \leqslant n-2$.

Из теоремы 2.5 следует, что на нечетномерных группах Ли любая незамкнутая левоинвариантная 1-форма имеет нетривиальный радикал. Кроме того, из теоремы 2.5 следует следующий важный результат:

Следствие 2.6. *Пусть α – незамкнутая левоинвариантная 1-форма на группе Ли размерности $n \geqslant 3$ и D – ортогональное дополнение* $\mathrm{rad}\,\alpha$ *относительно некоторой левоинвариантной римановой метрики. Тогда подпространство D имеет четную размерность при любом n.*

Теперь мы имеем два разложения алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в ортогональную сумму:

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_0 \oplus \ker\alpha,$$
$$\mathfrak{g} = D \oplus \mathrm{rad}\,\alpha,$$

где $e_0 \in \mathfrak{g} : \alpha(e_0) = 1$. В общем случае, ортогональное распределение D может быть как инволютивным (подалгебра в $\mathfrak{g}$), так и не инволютивным.

Предложение 2.7. *Пусть α – незамкнутая левоинвариантная 1-форма на группе Ли G и $e_0 \in \operatorname{rad}\alpha$. Тогда: $D \in \ker\alpha$ и распределение D не инволютивно.*

Доказательство. Положим, $W = \operatorname{rad}\alpha \cap \ker\alpha$. Поскольку $\operatorname{rad}\alpha = \mathbb{R}e_0 \oplus W$ и $\ker\alpha$ ортогонально e_0, то $D = \ker\alpha \ominus W$.

Положим, $\mathfrak{r} = \operatorname{rad}\alpha$. Из равенства (2.1) получаем:

$$-2d\alpha(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \alpha([\mathfrak{r}\oplus D, \mathfrak{r}\oplus D]) = \alpha([\mathfrak{r},\mathfrak{r}])+ \\ +\alpha([\mathfrak{r},D]) + \alpha([D,D]) = \alpha([D,D]) \neq 0.$$

Откуда:

$$[D,D] \not\subset \ker\alpha,\ \ [D,D] \not\subset D.$$

Теорема 2.8. *Пусть G – связная группа Ли с биинвариантной метрикой g, α – незамкнутая левоинвариантная 1-форма на группе G и $\operatorname{rad}\alpha \subset \ker\alpha$. Ортогональное распределение D является инволютивным тогда и только тогда, когда $\operatorname{rad}\alpha$ является идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Будем обозначать $\operatorname{rad}\alpha$ через $\mathfrak{r}$. Поскольку $\mathfrak{r} \subset \ker\alpha$ и $\ker\alpha$ имеет коразмерность 1, то $D \not\subset \ker\alpha$. В [4] доказано, что для любого $X \in \mathfrak{g}$ оператор ad_X является кососимметричным относительно биинвариантной метрики g. Для любых $X, Y \in D$ и любого $Z \in \mathfrak{r}$ имеем:

$$g([X,Y],Z) = g(\operatorname{ad}_X Y, Z) = -g(Y, \operatorname{ad}_X Z) = \\ = -g(Y,[X,Z]) = 0$$

тогда и только тогда, когда $[X,Z] \in \mathfrak{r}$. Поскольку $g(D,\mathfrak{r}) = 0$, то получаем, что $[D,D] \subset D$ тогда и только тогда, когда $[D,\mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{r}$. Поскольку $\mathfrak{r}$ – подалгебра и $\mathfrak{g} = D \oplus \mathfrak{r}$, то условие $[D,\mathfrak{r}] \subseteq D$ эквивалентно условию $[\mathfrak{g},\mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{r}$.

Замечание 2.9. В [4] показано, что связная компактная группа Ли всегда допускает биинвариантную метрику. Таким образом, для компактных групп Ли условие существования биинвариантной римановой метрики в теореме 2.8 автоматически выполняется.

Из теоремы 2.8 и замечания 2.9 сразу получаем:

Следствие 2.10. *Если связная компактная группа Ли G допускает левоинвариантную 1-форму с нетривиальным радикалом $\mathfrak{r}$ и инволютивным ортогональным распределением D, то алгебра Ли $\mathfrak{g}$ есть полупрямое произведение $D \rtimes \mathfrak{r}$.*

Можно получить класс примеров групп Ли с левоинвариантной 1-формой, имеющей радикал заданной размерности.

Пример 1.

Пусть Q – симплектическая группа Ли размерности $2n$, Ω – левоинвариантная симплектическая структура на Q и $H^2(Q;\mathbb{R}) = 0$. Тогда на Q существует левоинвариантная 1-форма $\alpha' : d\alpha' = \Omega$. Пусть R – связная группа Ли размерности k. Введем группу Ли $G = Q \rtimes R$ и продолжим 1-форму α' до 1-формы α на G, полагая, что $\alpha = 0$ на R. Получаем:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{r},\ \ [\mathfrak{q},\mathfrak{q}] \subseteq \mathfrak{q},\ \ [\mathfrak{q},\mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{r}.$$

Поскольку симплектическая форма Ω невырождена на Q, то получаем что $\operatorname{rad}\alpha = \mathfrak{r}$ и $\dim(\operatorname{rad}\alpha) = k$.

Примером левоинвариантной 1-формы с неинволютивным ортогональным распределением D может служить левоинвариантная контактная форма α на группе Ли нечетной размерности. В этом случае, $D = \ker\alpha$, $\operatorname{rad}\alpha = \mathbb{R}e_0$.

Теперь мы предъявим критерий существования на группе Ли левоинвариантной 1-формы с радикалом заданной размерности.

Предложение 2.11. *Пусть G – связная группа Ли размерности $n \geqslant 3$ и α – левоинвариантная 1-форма на группе G. 1-форма α имеет радикал размерности k тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{g}^*$ существуют линейнонезависимые 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_s : \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_s \wedge d\alpha = 0$, $s = n - k$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $\theta_1, \dots, \theta_n$ – дуальный базис пространства $\mathfrak{g}^*$. В этом базисе внешняя 2-форма $d\alpha$ имеет вид:

$$d\alpha = \sum_{i<j} a_{ij}\theta_i \wedge \theta_j.$$

имеем:

$$d\alpha(e_i, e_j) = a_{ij}.$$

Если $\dim(\operatorname{rad}\alpha) = k$, то вектора $e_{s+1}, \dots, e_n$ всегда можно выбрать так, чтобы они порождали $\operatorname{rad}\alpha$. Тогда $a_{ij} = 0$ при $s + 1 \leqslant j \leqslant n$. Получаем:

$$d\alpha = \sum_{i<j\leqslant s} a_{ij}\theta_i \wedge \theta_j.$$

Полагая $\omega_i = \theta_i$ при $i \leqslant s$, получаем:

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_s \wedge d\alpha = 0.$$

Обратно, если в $\mathfrak{g}^*$ существуют линейнонезависимые левоинвариантные 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_s : \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_s \wedge d\alpha = 0$, то в $\mathfrak{g}^*$ можно выбрать базис $\theta_1, \dots, \theta_n : \theta_i = \omega_i$ при $i \leqslant s$. В этом базисе внешняя 2-форма $d\alpha$ имеет вид:

$$d\alpha = \sum_{i<j\leqslant s} a_{ij}\theta_i \wedge \theta_j.$$

Если $e_1, \dots, e_n$ – дуальный базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то при $s < j \leqslant n$ имеем:

$$d\alpha(e_i, e_j) = a_{ij} = 0 \quad \forall i.$$

Таким образом, вектора $e_{s+1}, \dots, e_n$ порождают радикал 1-формы α размерности k.

Замечание 2.12. Поскольку первое число Бетти группы Ли G размерности $n \geqslant 3$ равно коразмерности идеала $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, то при $r \leqslant n - 2$ получаем оценку

$$\dim(U^r(G)) \leqslant \dim(\mathfrak{g}').$$

Пусть G – группа Ли размерности $n \geqslant 3$. Обозначим через $\rho(G)$ множество всех незамкнутых левоинвариантных 1-форм на группе G. Из теоремы 2.5 следует, что при $n = 2k$ $\rho(G) = \bigcup_{i=0}^{k-1} U^{2i}(G)$, а при $n = 2k+1$ $\rho(G) = \bigcup_{i=0}^{k-1} U^{2i+1}(G)$. Для любых двух различных чисел p и q $U^p(G) \cup U^q(G) = \emptyset$. В силу замечания 2.12 и свойства (4) предложения 2.2 получаем:

Предложение 2.13. *Пусть G – группа Ли размерности $n \geqslant 3$ и существует число $s \leqslant n-2 : \dim(U^s(G)) = \dim(\mathfrak{g}')$. Тогда $U^r(G) = \emptyset \quad \forall r \neq s$ и $U^s(G) \cong \mathbb{R}^s \setminus \{0\}$.*

Если α – левоинвариантная 1-форма на группе Ли G с нетривиальным радикалом, то орбита действия группы $\mathrm{aut}(\mathfrak{g})$ на 1-форму α диффеоморфна пространству $\mathrm{aut}(\mathfrak{g})/C(\alpha)$, где $C(\alpha)$ – стабилизатор 1-формы α. В частности, если R – подгруппа радикала 1-формы α, то R есть связная компонента единицы стабилизатора присоединенного действия группы G на 1-форму α.

Замечание 2.14. Если G – связная группа Ли и α – левоинвариантная 1-форма на группе G, то 1-форма α является замкнутой тогда и только тогда, когда она биинвариантна.

§ 3. Нильпотентные группы Ли

В этом разделе с помощью понятия радикала 1-формы мы получим известный результат о существовании канонического базиса нильпотентной алгебры Ли.

Пусть G – связная группа Ли размерности $n \geqslant 3$. Введем последовательность вложенных подпространств:

$$C_0 = \mathfrak{g},\ C_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],\ C_{k+1} = [C_k, \mathfrak{g}].$$

Группа Ли G называется *нильпотентной* если существует индекс $s : C_s = \{0\}$. Число s будем называть *степенью нильпотентной группы*. Для нильпотентной группы Ли G имеем $C_{s-1} \subseteq C(\mathfrak{g})$, где $C(\mathfrak{g})$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Отсюда, из свойства (3) предложения 2.2 получаем, что любая левоинвариантная незамкнутая 1-форма на нильпотентной группе Ли степени $s \geqslant 2$ имеет нетривиальный радикал $\mathfrak{r} : \dim(\mathfrak{r}) \geqslant \dim(C_{s-1})$.

Введем пространства $W(C_k)$, состоящие из классов эквивалентности всех левоинвариантных 1-форм на G с радикалом, равным C_k, когда $k > 0$, и всех левоинвариантных замкнутых 1-форм, когда $k = 0$. При $\dim(C_k) = r$ $W(C_k) \subset U^r(G)$. Пространство $W(C_k)$, дополненное нулевой 1-формой, является линейным подпространством в $U^r(G) \cup \{0\}$. Зафиксируем на группе G левоинвариантную риманову метрику. Тогда получаем разложение:

$$C_k = D_{k+1} \oplus C_{k+1},$$

где D_{k+1} – ортогональное дополнение C_{k+1} в C_k.

Лемма 3.1. *Если G – нильпотентная группа Ли степени $s \geqslant 2$, то*

$$\dim(W(C_k)) = \dim(D_{k+1}) \quad \forall k < s.$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in W(C_k)$. В силу равенства (2.1) имеем:

$$\alpha(C_{k+1}) = \alpha([C_k, \mathfrak{g}]) = 0,$$

и $\alpha(C_k) \neq 0$. Получаем, что пространство $W(C_k)$ состоит из левоинвариантных 1-форм $\alpha : \alpha(C_k) \neq 0, \alpha(C_{k+1}) = 0$. Любую такую 1-форму можно представить в виде:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m_{k+1}} a_i e_i^*,$$

где $m_k = \dim(D_k)$, $e_1, \ldots, e_{m_k}$ – левоинвариантный базис подпространства D_k. Таким образом, $\dim(W(C_k)) = \dim(D_{k+1})$.

Лемма 3.2. *Если G – нильпотентная группа Ли размерности $n \geqslant 3$, то $b_1(G) \geqslant 2$, где $b_1(G)$ – первое число Бетти группы G.*

Доказательство. Поскольку любая замкнутая левоинвариантная 1-форма на группе Ли G порождает класс когомологий $H^1(G\,\mathbf{z})$, то $b_1(G) = \dim(W(C_0)) = \dim(D_1)$. Предположим, что $\dim(D_1) = 1$. Тогда $\dim(C_1) = n-1$ и существует вектор e_0, ортогональный подпространству $C_1 : \mathfrak{g} = C_1 \oplus \mathbb{R}e_0$. Имеем:

$$C_1 = [C_1 + \mathbb{R}e_0, C_1 + \mathbb{R}e_0] = [C_1, C_1] + \mathbb{R}[e_0, C_1] = C_2.$$

Таким образом, $C_1 = C_2$, что противоречит нильпотентности группы G.

Алгебру Ли нильпотентной группы Ли G степени s можно разложить в прямую сумму:

$$\mathfrak{g} = D_1 \oplus \cdots \oplus D_s, D_s = C_{s-1}.$$

Из леммы 3.1 следует, что $W(C_k) = D^*_{k+1}$. Обозначим ортогональное дополнение подпространства C_K в $\mathfrak{g}$ через P_k, а размерность подпространства P_k через r_k. Получаем:

$$P_k = D_1 \oplus \cdots \oplus D_k,$$
$$r_k = m_1 + \cdots + m_k.$$

Если $e_1, \ldots, e_{r_{k+1}}$ – базис подпространства $P_{k+1} : e_i \in D_l$ при $m_{l-1} < i \leqslant m_l, l \leqslant k+1$, то $e_i^* \in W(C_k)$ при $m_k < i \leqslant m_{k+1}$. По предложению 2.11 получаем:

$$e_1^* \wedge \cdots \wedge e_{r_k} \wedge de_i^* = 0,$$

при $r_k < i \leqslant r_{k+1}$. Таким образом, получаем:

Теорема 3.3. *Пусть G – нильпотентная группа Ли размерности $n \geqslant 3$ и степени $s \geqslant 2$. Тогда в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует базис $e_1, \ldots e_n$:*

$$de_1^* = \cdots = de_{m_1}^* = 0,$$
$$de_l^* = -\sum_{i<j\leqslant r_k} C_{ij}^l e_i^* \wedge e_j^*|_{m_k < l \leqslant m_{k+1}},$$

где r_k – коразмерность подпространства C_k, $m_k = \dim(D_k)$ и C_{ij}^l – структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Если $\dim(C_k) = r$, то на нильпотентной группе Ли G могут существовать левоинвариантные 1-формы с радикалом размерности r, не лежащие в $W(C_k)$.

Пример 1.

Рассмотрим четырехмерную нильпотентную группу Ли G со следующими ненулевыми коммутаторами в алгебре Ли $\mathfrak{g}$:

$$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_2, e_3] = e_4,\ [e_3, e_4] = e_4.$$

Имеем:

$$C_1 = \{e_3, e_4\},\ C_2 = \mathbb{R}e_4, C_3 = \{0\}.$$

Применяя равенство (2.1), получаем:

$$\begin{aligned} de_1^* = de_2^* = 0,\\ de_3^* = -e_1^* \wedge e_2^*,\\ de_4^* = -e_2^* \wedge e_3^* - e_3^* \wedge e_4^*. \end{aligned}$$

Имеем:

$$W(C_0) = \{e_1^*, e_2^*\},\ W(C_1) = \mathbb{R}e_3^*,\ W(C_2) = \{0\}.$$

Поскольку $e_1 \in \operatorname{rad} e_4^*$, то из теоремы 2.5 следует, что существует трансверсальный e_1 вектор, лежащий в $\operatorname{rad} e_4^*$ и $\dim(\operatorname{rad} e_4^*) = 2$. В качестве такого вектора можно взять вектор $e_0 = e_2 + e_4$. Тогда, $\operatorname{rad} e_4^* = \{e_1, e_0\} \neq C_1$.

§ 4. Радикал 1-форм на группах Ли размерности 3

В этом разделе мы опишем пространства $U^r(G)$ для всех групп Ли размерности 3.

Пусть G – связная группа Ли размерности 3. Из теоремы 2.5 следует, что любая левоинвариантная 1-форма на G может иметь только радикал либо размерности 3, либо размерности1. Размерность пространства $U^3(G)$ равна первому числу Бетти группы Ли. Отсюда сразу получаем:

Лемма 4.1. *Пусть G – группа Ли размерности 3 и $b_1(G)$ – первое число Бетти группы G. Тогда:*

$$\dim(U^1(G)) = 3 - b_1(G).$$

Обозначим через H_3 трехмерную группу Гейзенберга, а через $E(\lambda)$ трехмерную группу Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{e}(\lambda)$, заданной базисными скобками Ли:

$$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = 0,\ [e_2, e_3] = \lambda e_3, \quad \lambda \neq 0.$$

Из классификации трехмерных алгебр Ли, полученной в [4], получаем:

Теорема 4.2. *Пусть G – некоммутативная группа Ли размерности 3. Тогда ее алгебра Ли изоморфна одной из следующих алгебр:*

- $\mathbb{R} \times \mathfrak{e}_1$,
- $\mathfrak{so}(3)$,

- $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$,
- $\mathfrak{h}_3$,
- $\mathfrak{e}_2$,
- $\mathfrak{e}_{1,1}$,
- $\mathfrak{e}(\lambda)$.

Где E_1 – группа аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}$, E_2 – группа движений двумерного евклидова пространства, а $E_{1,1}$ – группа движений двумерного псевдоевклидова пространства.

Поскольку группы $\mathrm{SO}(3)$ и $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ являются простыми, то на этих группах не существует ненулевых замкнутых левоинвариантных 1-форм. Из свойства (5) предложения 2.2 следует, что пространство $U^1(G)$ не зависит от выбора базиса алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Получаем, что $U^1(G) = \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$, когда $G \cong \mathrm{SO}(3)$ или $G \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Будем обозначать через $B_1(G)$ пространство всех левоинвариантных замкнутых 1-форм на группе G. Пространство $B_1(G)$ является линейным подпространством $\mathfrak{g}^*$. Теперь получаем:

Предложение 4.3. *Если G – простая группа Ли размерности 3, то $B_1(G) = \{0\}$, а $U^1(G) \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.*

Если G – группа Ли размерности 3 и $\dim g' = 1$, то в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ можно выбрать базис e_1, e_2, e_3:

$$de_1^* = de_2^* = 0, \ de_3^* = -e_2^* \wedge (ae_1^* + be_3^*).$$

Из леммы 4.1 получаем $\dim(\operatorname{rad} de_3^*) = 1$. Откуда:

$$B_1(G) \cong \mathbb{R}^2, \ U^1(G) \cong \mathbb{R}^*.$$

Окончательно получаем:

Предложение 4.4. *Пусть G – разрешимая группа Ли размерности 3 и $\dim(\mathfrak{g}') = 1$. Тогда:*

$$B_1(G) \cong \mathbb{R}^2, \ U^1(G) \cong \mathbb{R}^*.$$

Если G – группа Ли размерности 3 и $\dim(g') = 2$, то из теоремы 4.2 следует, что либо $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{e}_2$, либо $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{e}_{1,1}$. Для алгебры Ли $\mathfrak{e}_2$ имеют вид:

$$\begin{aligned} de_1^* &= 0, \\ de_2^* &= -e_1^* \wedge e_3^*, \\ de_3^* &= e_1^* \wedge e_2^*. \end{aligned}$$

По предложению 2.11 получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{rad} e_2^* &= \mathbb{R}e_2, \\ \operatorname{rad} e_3^* &= \mathbb{R}e_3. \end{aligned}$$

Для алгебры Ли $\mathfrak{e}_{1,1}$ уравнения Маурэра-Картана имеют вид:

$$\begin{aligned} de_1^* &= 0, \\ de_2^* &= -e_1^* \wedge e_2^*, \\ de_3^* &= -e_1^* \wedge e_3^*. \end{aligned}$$

По предложению 2.11 получаем:

$$\operatorname{rad} e_2^* = \mathbb{R}e_3,$$
$$\operatorname{rad} e_3^* = \mathbb{R}e_2.$$

В силу свойства (4) предложения 2.2 и леммы 4.1 получаем, что любая левоинвариантная 1-форма $\alpha = \lambda e_2^* + \mu e_3^*$ на обеих алгебрах имеет одномерный радикал при $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$. Получаем:

Предложение 4.5. *Пусть G – разрешимая группа Ли размерности 3 и $\dim(\mathfrak{g}') = 2$. Тогда:*

$$B_1(G) \cong \mathbb{R},\ U^1(G) \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Теперь мы можем перечислить количество связных компонент и количество пораждающих первой фундаментальной группы $\pi_1(G)$ пространства $U^1(G)$ для группы Ли G размерности 3 в зависимости от размерности идеала $\mathfrak{g}'$.

$\dim(\mathfrak{g}')$	Число связных компонент	$\dim(\pi_1(G))$
0	0	0
1	2	1
2	1	2
3	1	2

§ 5. Радикал 1-форм на группах Ли размерности 4

В этом разделе мы опишем пространства левоинвариантных 1-форм на группах Ли размерности 4. Полную классификацию алгебр Ли размерности 4 вместе с матричным представлением общего элемента группы можно найти в [7]. Из теоремы 2.5 следует, что на группе Ли размерности 4 любая левоинвариантная 1-форма может иметь радикал только размерности 0, 2 или 4.

В [7] доказано, что любая неразрешимая алгебра Ли размерности 4 изоморфна либо $\mathfrak{so}(3) \times \mathbb{R}$, либо $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Пусть G – неразрешимая группа Ли размерности 4. Тогда $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \times \mathbb{R}$, где $\mathfrak{s}$ – простая алгебра Ли размерности 3. Пусть α – левоинвариантная 1-форма на группе G. Если $\alpha(\mathfrak{s}) \neq 0$, то из предложения 4.3 следует, что $\dim(\operatorname{rad} \alpha|_{\mathfrak{s}}) = 1$. Поскольку $\mathbb{R}$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то из свойства (3) предложения 2.2 получаем $\dim(\operatorname{rad} \alpha) = 2$. Если $\alpha(\mathbb{R}) \neq 0$, то $\mathfrak{s} = \ker \alpha$. Используя равенство (2.1), получаем $d\alpha = 0$. Таким образом, получаем:

Предложение 5.1. *Пусть G – неразрешимая группа Ли размерности 4. Тогда:*

$$B_1(G) \cong \mathbb{R},\ U^2(G) \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},\ U^0(G) = \emptyset.$$

Пусть G – разрешимая группа Ли размерности 4. Идеал $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть нильпотентная подалгебра размерности $\leqslant 3$ (см. [8]). Если $\dim(\mathfrak{g}') = 3$, то из теоремы 4.2 следует, что либо $\mathfrak{g}' \cong \mathfrak{h}_3$, либо $\mathfrak{g}' \cong \mathbb{R}^3$.

Если $\dim(\mathfrak{g}') = 2$, то $\mathfrak{g}' \cong \mathbb{R}^2$. Пусть e_3, e_4 – базис идеала $\mathfrak{g}'$. Пусть e_2 – базисный вектор из $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}'$. Для любого $X \in \mathfrak{g}/e_2$, $[X, e_2] = C_1(X)e_3 + C_2(X)e_4$. Уравнение $[X, e_2] = 0$ эквивалентно системе уравнений:

$$C_1(X) = 0,$$
$$C_2(X) = 0.$$

Ранг этой системы равен 1. Следовательно, можно выбрать базисный вектор $e_1 : [e_1, e_2] = 0$. Получаем $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}^2$.

Если $\dim(\mathfrak{g}') = 1$ и вектор e_4 порождает $\mathfrak{g}'$, то при выбранном векторе e_1 для любого $X \in \mathfrak{g}/e_1$ пространство решений уравнения $[e_1, X] = 0$ имеет размерность 2. Следовательно, можно выбрать базисные векторы $e_2, e_3 : [e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0$. Если $[e_1, e_4] \neq 0$, то из тождества Якоби следует, что $[e_2, e_3] = 0$ и $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$. Если $[e_1, e_4] = 0$, то, выбирая вектор e_2 так, что $[e_2, e_4] = 0$, получаем, что $\mathfrak{g}$ есть частный случай алгебры Ли $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^3$ с ненулевыми базисными скобками Ли

$$[e_2, e_3] = ae_4, \ [e_3, e_4] = e_4.$$

Теперь получаем:

Теорема 5.2. *Пусть G – разрешимая группа Ли размерности 4. Тогда ее алгебра Ли изоморфна одной из следующих алгебр:*

- $\mathbb{R} \rtimes \mathfrak{h}_3$,
- $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^3$,
- $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}^2$,
- $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$.

Пусть G – разрешимая группа Ли размерности 4 и $\dim(\mathfrak{g}') = 3$. Выберем в $\mathfrak{g}$ вектор e_1, трансверсальный идеалу $\mathfrak{g}'$. Ограничение оператора ad_{e_1} на $\mathfrak{g}'$ есть невырожденное линейное преобразование подпространства $\mathfrak{g}'$. Поскольку любой линейный оператор на векторном пространстве размерности 3 имеет не менее одного вещественного собственного значения, то в $\mathfrak{g}'$ существует вектор e_2 и двумерное подпространство V такие что:

$$\mathrm{ad}_{e_1} e_2 = \lambda e_2, \ \mathrm{ad}_{e_1} V = V, \ \lambda \neq 0.$$

С учетом теоремы 5.2 окончательно получаем вид ненулевых базисных скобок Ли:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \lambda e_2, \ [e_1, e_3] = ae_3 + be_4, \\ [e_1, e_4] &= ce_4 + de_4, \ [e_3, e_4] = \delta e_2, \\ &\lambda \neq 0, ac - bd \neq 0, \end{aligned}$$

где $\delta = 1$ если $\mathfrak{g}' \cong \mathfrak{h}_3$, $\delta = 0$ если $\mathfrak{g}' \cong \mathbb{R}^3$. Из уравнений Маурэра-Картана получаем:

$$\begin{aligned} de_1^* &= 0 \\ de_2^* &= -\lambda e_1^* \wedge e_2^* - \delta e_3^* \wedge e_4^*, \\ de_3^* &= -e_1^* \wedge (ae_3^* + ce_4^*), \\ de_4^* &= -e_1^* \wedge (be_3^* + de_4^*). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Из условий (5.1) и предложения 2.11 получаем, что при $\delta = 0$ $\dim(\mathrm{rad}\, e_2^*) = 2$, при $\delta = 1$ $\dim(\mathrm{rad}\, e_2^*) = 0$, $\dim(\mathrm{rad}\, e_3^*) = \dim(\mathrm{rad}\, e_3^*) = 2$. Если $\delta = 0$ и α есть линейная комбинация $a_2 e_2^* + a_3 e_3^* + a_4 e_4^*$, то $d\alpha = e_1^* \wedge \eta$, где η – некоторая 1-форма, трансверсальная e_1^*. В силу предложения 2.11 получаем, что $\dim(\mathrm{rad}\, \alpha) = 2$. Если $\delta = 1$ и α есть линейная комбинация $a_3 e_3^* + a_4 e_4^*$, то аналогичным образом получаем, что $\dim(\mathrm{rad}\, \alpha) = 2$. В этом случае, $\mathrm{rad}(a_2 e_2^* + \alpha) = \{0\}$. Таким образом, получаем:

Предложение 5.3. *Пусть G – разрешимая группа Ли размерности 4 и* $\dim(\mathfrak{g}') = 3$. *Тогда:*

(1) *Если $\mathfrak{g}' \cong \mathfrak{h}_3$, то*

$$B_1 \cong \mathbb{R},\ U^2(G) \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ U^0(G) \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

(2) *Если $\mathfrak{g}' \cong \mathbb{R}^3$, то*

$$B_1 \cong \mathbb{R},\ U^2(G) \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},\ U^0(G) = \emptyset.$$

Лемма 5.4. *Пусть G – группа Ли размерности 4, изоморфная $\mathbb{R} \times G_3$, где G_3 – группа Ли размерности 3. Тогда любая левоинвариантная незамкнутая 1-форма на группе G имеет радикал размерности 2.*

Доказательство. Пусть $C(\mathfrak{g})$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathbb{R} \subseteq C(\mathfrak{g})$. Из свойства (3) предложения 2.2 следует, что любая незамкнутая левоинвариантная 1-форма на группе G имеет нетривиальный радикал. По теореме 2.5 получаем, что размерность радикала равна 2.

Пусть G – разрешимая группа Ли размерности 4 и $\mathfrak{g}' \cong \mathbb{R}^2$. Из теоремы 5.2 следует, что в $\mathfrak{g}$ можно выбрать линейнонезависимые векторы $e_1, e_2 : [e_1, e_2] = 0$. Линейные операторы ad_{e_1}, ad_{e_2} инвариантно действуют на идеале $\mathfrak{g}'$. Пусть e_3, e_4 – базис подпространства $\mathfrak{g}'$. Получаем следующие ненулевые базисные скобки Ли:

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_3] = a_1 e_3 + b_1 e_4,\ [e_1, e_4] = c_1 e_3 + d_1 e_4,\\
&[e_2, e_3] = a_2 e_3 + b_2 e_4,\ [e_2, e_4] = c_2 e_3 + d_2 e_4.
\end{aligned}$$

Из уравнений Маурэра-Картана получаем:

$$\begin{array}{ll}
de_1^* & = de_2^* = 0,\\
de_3^* & = -e_1^* \wedge (a_1 e_3^* + c_1 e_4^*) - e_2^* \wedge (a_2 e_3^* + c_2 e_4^*),\\
de_4^* & = -e_1^* \wedge (b_1 e_3^* + d_1 e_4^*) - e_2^* \wedge (b_2 e_3^* + d_2 e_4^*).
\end{array} \tag{5.2}$$

Из тождества Якоби для базисных векторов можно получить условия:

$$b_1 d_2 - b_2 d_1 = 0,\ a_1 c_2 - a_2 c_1 = c_1 (d_2 - d_1).$$

Отсюда, 1-формы $b_1 e_3^* + d_1 e_4^*$ и $b_2 e_3^* + d_2 e_4^*$ всегда пропорциональны, и по предложению 2.11 $\dim(\mathrm{rad}\, e_4^*) = 2$. Аналогично получаем, что при $c_1(d_2 - d_1) = 0$ $\dim(\mathrm{rad}\, e_3^*) = 2$. При $c_1(d_2 - d_1) \neq 0$ $\mathrm{rad}\, e_3^* = \{0\}$. Рассмотрим линейную комбинацию $\alpha = a e_3^* + b e_4^*$. При $c_1(d_2 - d_1) = 0$ $d\alpha = (e_1^* + e_2^*) \wedge \eta$, где η – некоторая линейная комбинация 1-форм e_3^* и e_4^*. Получаем $\dim(\mathrm{rad}\, \alpha) = 2$. При $c_1(d_2 - d_1) \neq 0$ $\mathrm{rad}\, \alpha = \{0\}$ когда $b \neq 0$, и $\mathrm{rad}\, \alpha = \mathrm{rad}\, e_3^*$ когда $b = 0$. Окончательно получаем:

Предложение 5.5. *Пусть G – разрешимая группа Ли размерности 4 и* $\dim(\mathfrak{g}') = 2$. *Тогда $B_1(G) \cong \mathbb{R}^2$ и:*

(1) *Если коэффициенты в уравнениях (5.2) удовлетворяют условию $c_1(d_2 - d_1) = 0$, то*

$$U^2(G) \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ U^0(G) = \emptyset.$$

(2) Если коэффициенты в уравнениях (5.2) удовлетворяют условию $c_1(d_2-d_1)\neq 0$, то
$$U^2(G)\cong\mathbb{R}^*,\ U^0(G)\cong\mathbb{R}^2\setminus\{0\}.$$

Следствие 5.6. *Пусть G – разрешимая группа Ли размерности 4 с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, заданной уравнениями (5.2), коэффициенты в котором удовлетворяют условию $c_1(d_2-d_1)\neq 0$. Тогда на группе G существует двупараметрическое семейство левоинвариантных точных симплектических структур.*

Пусть G – разрешимая группа Ли размерности 4 и $\dim(\mathfrak{g}')=1$. Из теоремы 5.2 следует, что либо $\mathfrak{g}\cong\mathbb{R}^3\rtimes\mathbb{R}$, либо $\mathfrak{g}\cong\mathbb{R}\times\mathfrak{g}_3$, где G_3 – группа Ли размерности 3 такая, что $\dim(\mathfrak{g}'{}_3)=1$. Если $\mathfrak{g}\cong\mathbb{R}\times\mathfrak{g}_3$, то из леммы 5.4 и предложения 4.4 следует, что $\dim(B_1(G))=3$, $\dim(U^2(G))=1$, $\dim(U^0(G))=0$. Если $\mathfrak{g}\cong\mathbb{R}^3\rtimes\mathbb{R}$, то в $\mathfrak{g}$ можно выбрать базис $e_1,\dots,e_4$, в котором ненулевые базисные скобки Ли имеют вид:

$$\begin{gathered}[e_1,e_4]=ae_4,\ [e_2,e_4]=be_4,\\ [e_3,e_4]=ce_4,\ a^2+b^2+c^2\neq 0.\end{gathered}$$

Из уравнений Маурэра-Картана получаем:

$$\begin{aligned}&de_1^*=de_2^*=de_3^*=0,\\ &de_4^*=e_4\wedge(ae_1^*+be_2^*+ce_3^*).\end{aligned}$$

По предложению 2.11 получаем $\dim(\operatorname{rad}e_4^*)=2$. Таким образом, получаем:

Предложение 5.7. *Пусть G – разрешимая группа Ли размерности 4 и $\dim(\mathfrak{g}')=1$. Тогда:*

$$B_1(G)\cong\mathbb{R}^3,\ U^2(G)\cong\mathbb{R}^*,\ U^0(G)=\emptyset.$$

Из предложений 5.1, 5.3 и 5.7 вытекает следующий результат:

Следствие 5.8. *Пусть G – группа Ли размерности 4. Если ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ удовлетворяет одному из условий:*

- $\mathfrak{g}$ *– неразрешимая алгебра Ли,*
- $\mathfrak{g}'$ *– коммутативный трехмерный идеал в* $\mathfrak{g}$,
- $\mathfrak{g}'$ *– одномерный идеал в* $\mathfrak{g}$.

То на группе G не существует левоинвариантных точных симплектических структур.

§ 6. Геометрические структуры связанные с радикалом 1-форм

В этом разделе мы покажем как понятие радикала 1-форм используется в различных геометрических структурах на группах Ли.

Пусть G – связная группа ли размерности $n\geqslant 3$, α – незамкнутая левоинвариантная 1-форма на группе G и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму:
$$\mathfrak{g}=D\oplus\operatorname{rad}\alpha,$$

где D – ортогональное дополнение $\operatorname{rad}\alpha$ относительно некоторой левоинвариантной римановой метрики на группе G. В силу следствия 2.6, ортогональное распределение D имеет четную размерность при любом n. Необходимые и достаточные условия инволютивности распределения D в зависимости от расположения $\operatorname{rad}\alpha$ приведены в предложении 2.7 и теореме 2.8. Именно ортогональное распределение D играет важную роль во многих геометрических структурах задаваемых 1-формами. Поскольку радикал любой незамкнутой левоинвариантной 1-формы на группе Ли всегда пораждает собственную подгруппу в G, то возникает обратная задача: для заданной подгруппы четной коразмерности найти на группе G левоинвариантную 1-форму для которой эта подгруппа будет подгруппой радикала.

Предложение 6.1. *Пусть G – разрешимая группа Ли размерности $n \geqslant 3$. Если максимальная собственная подгруппа R четной коразмерности в G является связной и компактной, то на G существует левоинвариантная 1-форма для которой подгруппа R является подгруппой радикала.*

Доказательство. Поскольку для разрешимой группы Ли первое число Бетти всегда строго меньше n, то на G существует незамкнутая левоинвариантная 1-форма α'. Если R' – подгруппа радикала 1-формы α', то $R' \subset R$. Связная компактная группа всегда является унимодулярной Следовательно, мы можем применить к 1-форме α' операцию усреднения по подгруппе R (см. [4]). Получаем левоинвариантную 1-форму $\alpha : \operatorname{Ad}^*_R \alpha = \alpha$. Поскольку R – максимальная подгруппа четной коразмерности, то R есть подгруппа радикала 1-формы α.

6.1. Точные симплектические структуры. Пусть α – незамкнутая 1-форма на группе Ли G. Ограничение внешней 2-формы $d\alpha$ на подпространство D есть точная симплектическая форма. Если группа G компактна, $\operatorname{rad}\alpha \subset \ker\alpha$ и $\operatorname{rad}\alpha$ – идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то по теореме 2.8 распределение D инволютивно. В этом случае D порождает подгруппу в G, с точной симплектической структурой $d\alpha$. Таким образом получаем:

Предложение 6.2. *Пусть G – связная компактная группа Ли размерности $\geqslant 3$. Если на группе G существует левоинвариантная 1-форма $\alpha : \operatorname{rad}\alpha \subset \ker\alpha$ и $[\operatorname{rad}\alpha, \mathfrak{g}] \subseteq \operatorname{rad}\alpha$, то группа G содержит симплектическую подгруппу с точной симплектической структурой.*

Пусть α – левоинвариантная 1-форма на группе G с нетривиальной подгруппой радикала R. Орбита присоединенного действия группы G $\operatorname{Ad}^*_G \alpha$ лежит в одном из пространств $U^r(G)$, и R есть стабилизатор 1-формы α. Получаем, что $\operatorname{Ad}^*_G \alpha$ есть однородное пространство диффеоморфное G/R с подгруппой изотропии R.

Предложение 6.3. *Пусть G – связная группа Ли размерности $n \geqslant 3$ и α – левоинвариантная 1-форма на группе G с нетривиальной подгруппой радикала R. Тогда, однородное пространство $\operatorname{Ad}^*_G \alpha$ имеет четную размерность и допускает точную симплектическую структуру.*

Доказательство. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму

$$\mathfrak{g} = D \oplus \mathfrak{r},$$

где $\mathfrak{r}$ – радикал 1-формы α. Имеем $\dim(D) = n - \dim(\mathfrak{r}) = 2k$. Получаем:

$$\dim(\operatorname{Ad}^*_G \alpha) = \dim(D) = 2k.$$

Из равенства (2.1) следует, что 2-форма $d\alpha$ является Ad_R-инвариантной. Следовательно, ограничение 2-формы $d\alpha$ на подпространство D определяет точную симплектическую структуру на однородном пространстве $\operatorname{Ad}^*_G \alpha$.

Следствие 6.4. *Пусть R максимальная подгруппа четной коразмерности в группе Ли G. Если подгруппа R связна и компактна, то однородное пространство G/R допускает точную симплектическую структуру.*

6.2. Аффинорные структуры. Пусть g – левоинвариантная риманова метрика на группе Ли G и α – левоинвариантная незамкнутая 1-форма на G. *Аффинором*, ассоциированным с 1-формой α, называется левоинвариантный эндоморфизм Φ алгебры Ли $\mathfrak{g}$: $g \circ \Phi = g$ и $d\alpha(X,Y) = g(\Phi X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$. Аффинор обладает следующими характеристическими свойствами (см. [6]):

Предложение 6.5. *Пусть Φ – аффинор на группе Ли G, ассоциированный с левоинвариантной 1-формой α, и D – ортогональное дополнение* $\operatorname{rad}\alpha$ *в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда:*

(1) $\ker \Phi = \operatorname{rad}\alpha$.
(2) $\Phi^2|_D = -\operatorname{id}$.
(3) $\Phi^* d\alpha = d\alpha$.
(4) Симметричная 2-форма $d\alpha_\Phi$: $d\alpha_\Phi(X,Y) = d\alpha(X, \Phi Y) \quad \forall X, Y \in D$ является положительно определенной.

Тройка (α, D, Φ) называется *аффинорной структурой*, а тройка (α, Φ, g) называется *аффинорной метрической структурой*. Обозначим через ξ элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$: $\alpha(X) = g(\xi, X) \quad \forall X \in \mathfrak{g}$. Аффинорная структура (α, Φ) называется *строгой* если $\xi \in \operatorname{rad}\alpha$. Векторное поле X на группе Ли G называется *геодезическим*, если кривая $\exp(tX)$ является геодезической в G. Из общего результата, доказанного для алгеброидов Ли в [6], получаем:

Теорема 6.6. *Пусть (α, φ, g) – левоинвариантная аффинорная метрическая структура на группе Ли G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *(α, Φ, g) – строгая аффинорная метрическая структура.*
(2) *Векторное поле ξ является геодезическим.*
(3) $\mathrm{L}_\xi \alpha = 0$, *где $L_X \alpha$ – производная Ли 1-формы α вдоль векторного поля X.*

При $n = 2k+1$ четверка (α, ξ, Φ, g) есть почти контактная метрическая структура. Если $\operatorname{rad}\alpha$ имеет радикал минимальной размерности 1 и $\operatorname{rad}\alpha = \mathbb{R}\xi$, то α есть левоинвариантная контактная структура на G. Левоинвариантные строгие почти контактные структуры на группах Ли размерности 3 классифицированы в [3], а контактные группы Ли размерности 3 и 5 классифицированы в [2].

6.3. Субримановы и субкэлеровы структуры. Пусть α – левоинвариантная 1-форма с нетривиальным радикалом на группе Ли G. Выберем дополнительное к $\operatorname{rad}\alpha$ левоинвариантное распределение D. Если принять свойства из предложения 6.5 как аксиомы аффинора Φ ассоциированного с 1-формой α, то аффинорную структуру (α, D, Φ) можно определить, не используя риманову метрику. Если (α, D, Φ) – строгая аффинорная структура, то из условия $\xi \not\subset \ker\alpha$ и предложения 2.7 следует, что распределение D неинволютивно. Из свойства (4) предложения 6.5 следует, что симметричная 2-форма $d\alpha_\Phi$ есть риманова метрика на D. Таким образом, пара $(D, d\alpha_\Phi)$ есть левоинвариантная субриманова структура на группе G. Таким образом, любая левоинвариантная строгая аффинорная структура на группе Ли G определяет левоинвариантную субриманову структуру на G.

Введем последовательность распределений в $\mathfrak{g}$

$$D_0 = D,\ D_1 = [D, D],\ D_k = [D_{k-1}, D_{k-1}].$$

Если существует индекс $s : D_s = \mathfrak{g}$, то группа Ли G есть группа Карно с субримановой структурой $(D, d\alpha_{,\Phi})$. Такая аффинорная субриманова структура индуцирует в G метрику Карно-Каратеодори h:

$$h(x, y) = \inf_{\gamma(t)} \int_0^1 \sqrt{d\alpha_\Phi(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}dt,$$

где $\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y,\ \dot\gamma(t) \in D_t$.

Если $\operatorname{rad}\alpha \subset \ker\alpha$ и $[D, D] \subseteq D$, то подпространство D порождает подгруппу Q в G четной размерности. Тогда ограничение аффинора Φ на подгруппу Q есть почти комплексная структура на Q. Аффинорная структура (α, D, Φ) называется нормальной если $ad_{\Phi X} = \Phi \circ \operatorname{ad}_X \quad \forall X \in D$. В этом случае, почти комплексная структура Φ на Q является интегрируемой (см. [9], глава 9). Из свойства (3) предложения 6.5 следует, что $d\alpha_\Phi$ есть кэлерова метрика на подгруппе Q. Таким образом получаем, что любая нормальная левоинвариантная аффинорная структура $(\alpha, D, \Phi) : [D, D] \subseteq D$ на группе G определяет на G субкэлерову структуру $(Q, J, d\alpha_\Phi)$, где $Q = \exp(D),\ J = \Phi|_D$.

Если (α, D, Φ) – строгая аффинорная структура на группе Ли G, то $D \subset \ker\alpha$ и по предложению 2.7 распределение D неинволютивно. Следовательно, строгие аффинорные структуры не могут порождать субкэлеровы структуры. Если $\operatorname{rad}\alpha \subset \ker\alpha$ и $[\operatorname{rad}\alpha, \mathfrak{g}] \subseteq \operatorname{rad}\alpha$, то по теореме 2.8 на компактной группе Ли распределение D инволютивно. Получаем:

Предложение 6.7. *Пусть (α, D, Φ) – левоинвариантная нормальная аффинорная структура на связной компактной группе Ли размерности $n \geqslant 3$. Если $\operatorname{rad}\alpha \subset \ker\alpha$ и $\operatorname{rad}\alpha$ – идеал в $\mathfrak{g}$, то в G существует комплексная подгруппа Q комплексной размерности $n - \dim(\operatorname{rad}\alpha)$, и $d\alpha_\Phi$ есть левоинвариантная кэлерова метрика на Q*

В некоторых случаях комплексные подгруппы в G позволяют получить левоинвариантные 1-формы с нетривиальной подгруппой радикала.

Предложение 6.8. *Пусть Q – комплексная нормальная подгруппа в группе Ли G, R – фактор-группа G/Q и на Q существует левоинвариантная кэлерова метрика с точной фундаментальной 2-формой. Тогда на группе G существует левоинвариантная 1-форма с подгруппой радикала, равной R.*

Доказательство. Поскольку Q и $R \cong G/q$ – подгруппы в G, то алгебра Ли $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму подалгебр $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{r}$. Имеем $[\mathfrak{q}, \mathfrak{r}] = 0$. Пусть Ω – фундаментальная 2-форма кэлеровой метрики на подгруппе Q. Тогда на Q существует левоинвариантная 1-форма $\alpha' : d\alpha' = \Omega$. Введем 1-форму α на G, полагая $\alpha|_{\mathfrak{r}} = 0$, $\alpha|_{\mathfrak{q}} = \alpha'$, Используя равенство (2.1), получаем $\operatorname{rad}\alpha = \mathfrak{r}$ и R есть подгруппа радикала 1-формы α.

Замечание 6.9. Условие существования на подгруппе Q в предложении 6.8 кэлеровой метрики с точной фундаментальной 2-формой эквивалентно существованию на Q симплектической структуры, лежащей в нулевом классе когомологий $H^2(Q;\mathbb{R})$, ассоциированной с комплексной структурой на Q.

Список литературы

[1] D. E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manyfolds*, Birkhauser, Boston, 2010.

[2] A. Diatta, “Left invariant contact structures on Lie groups”, *Differential Geometry and its Applications*, **26**:5 (2008), 544-552.

[3] G. Calvaruso, “Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures”, *Journal of Geometry and Physics*, **69** (2013), 60-73.

[4] J. Milnor, “Curvatures of left invariant metrics on Lie groups”, *Advances in Math*, **21** (1976), 293-329.

[5] Е. С. Корнев, “Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **53**:1 (2012), 107-123.

[6] Е. С. Корнев, “Аффинорные структуры на векторных расслоениях”, *Сиб. матем. журн.*, **55**:6 (2014), 1283-1296.

[7] Е. С. Корнев, *Почти комплексные структуры и ассоциированные метрики на группах Ли размерности 4*, Lambert Academic Publishing, Саарбрюкен, 2010.

[8] Ж.-П. Серр, *Группы Ли и алгебры Ли*, Мир, Москва, 1969.

[9] Ш. Кобаяси, К. Намидзу, *Основы дифференциальной геометрии (в 2 т.)*, Наука, Москва, 1981.

Е. С. Корнев (Е. С. Корнев)
Кемеровский государственный университет
E-mail: q148@mail.ru