Геометрия 1-форм на группах Ли
The Geometry Of 1-forms On The Lie Groups

Корнев Е. С.

Kornev E. S. Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;
q148@mail.ru

Пусть G – связная группа Ли размерности n, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, а α – левоинвариантная 1-форма на G. Ядро формы α является левоинвариантным распределением на группе G и имеет размерность $n-1$.

Радикалом 1-формы α называется подпространство $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ такое, что для всех $X \in \mathfrak{r}$ и $Y \in \mathfrak{g}, d\alpha(X,Y) = 0$. Из этого определения и тождества Якоби следует, что радикал 1-формы является подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

Теорема 1. *Если α незамкнутая 1-форма на группе G размерности n, а m – размерность ее радикала $\mathfrak{r}$, тогда: если n четно, то m также четно и $0 \leq m \leq n-2$. Если n нечетно, то m также нечетно и $1 \leq m \leq n-2$.*

Если $m = 0$, то $d\alpha$ – симплектическая форма, если $m = 1$, то α – контактная форма.

Обозначим через R связную подгруппу порожденную радикалом $\mathfrak{r}$. Эта подгруппа называется подгруппой радикала.

Теорема 2. *Подгруппа радикала R 1-формы α совпадает с подгруппой изотропии формы α. т. е. $\mathrm{Ad}_R\alpha = \alpha$.*

Обозначим через D фиксированное дополнение радикала $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{g}$. Тогда D является левоинвариантным распределением на группе G, и $\mathfrak{g} = D \oplus \mathfrak{r}$.

Пусть β – левоинвариантная симметричная неотрицательная 2-форма на группе G такая, что для всех $X \in D$ и $Y \in \mathfrak{g}, \beta(X,Y) = 0$, а ограничение формы β на радикал $\mathfrak{r}$ невырождено. Тогда сужение формы β на R задает левоинвариантную риманову метрику на подгруппе R. Форма β называется метрикой радикала.

Теорема 3. *Если форма β является Ad_R-инвариантной, то распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы R.*

Теорема 4. *Если подгруппа радикала R – компактная унимодулярная подгруппа в G, то распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы R.*

Следствие. Если подгруппа R является максимальным тором в группе G, то распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы R.

Если считать, что подгруппа R действует на группе G справа, то можно рассматривать расслоение $P(G/R, \pi, G)$ со слоем R, где π –естественная проекция группы G на G/R.

Теорема 5. *Пусть R – подгруппа радикала 1-формы α на группе G, β – левоинвариантная метрика радикала и подгруппа R является максимальным тором в G. Тогда:*

(1) Распределение D является связностью в расслоении P.

(2) Если $e_1, \ldots, e_m$ – ортонормированный базис радикала $\mathfrak{r}$, то форма связности D имеет вид:

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^{m} \beta(X, e_i)\, e_i.$$

(3) Связность D является плоской (т. е. ее форма кривизны равна нулю) тогда, и только тогда, когда распределение D инволютивно.

Замечание. Теорема 5 остается справедливой и в том случае, когда R – некомпактная коммутативная подгруппа в G.

Теорема 6. *Пусть G –связная односвязная группа Ли и R подгруппа радикала левоинвариантной 1-формы α на G. Тогда, если R – нормальная подгруппа в G, то $G \cong G/R \rtimes R$ и расслоение $P(G/R, \pi, G)$ тривиально.*