УДК 514.76

Е.С. Корнев

ИНВАРИАНТНЫЕ АФФИНОРНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ГРУППАХ ЛИ

Пусть G – связная группа Ли размерности n, $L(G)$ – ее алгебра Ли и α – левоинвариантная 1-форма на G. Радикалом 1-формы α называется подалгебра Ли ρ в $L(G)$ такая, что для любого $X \in \rho$ и $Y \in L(G)$, $d\alpha(X,Y) = 0$. Подгруппа R, порожденная радикалом ρ, называется подгруппой радикала. Метрикой радикала ρ называется левоинвариантная симметричная неотрицательная 2-форма β, обладающая свойствами:

1. Форма β не вырождена на ρ.
2. Форма β имеет радикал максимальной размерности, т. е. алгебру Ли группы G можно представить в виде прямой суммы векторных пространств $L(G) = \rho \oplus \operatorname{rad}\beta$.

Сужение формы β на ρ задает на ρ риманову метрику.

Обозначим радикал метрики радикала β через D. D можно рассматривать как левоинвариантное распределение на группе G. Из определения следует, что $L(G) = D \oplus \rho$. Поскольку ρ является подалгеброй, то Ad_R действует на ρ инвариантно. Если Ad_R действует инвариантно на D, то алгебра Ли G редуцируема в смысле Намидзу. Обозначим через P расслоение $G \xrightarrow{\pi} G/R$.

Теорема 1. *Если подгруппа радикала R является максимальным тором в* G и *проекция $\pi : L(G) \mapsto \rho$ вдоль D коммутирует с присоединенным действием подгруппы радикала, тогда:*

1. *Распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы радикала и является связностью расслоения P.*
2. *Форма связности имеет вид:*

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^{m} \beta(X, E_i) E_i ,$$

3. *где $E_i,\ldots,E_m$ - фиксированный ортонормированный относительно метрики β базис радикала ρ, m - размерность радикала ρ, $X \in L(G)$.*
4. *Связность D является плоской (т. е. имеет нулевую форму кривизны связности) тогда и только тогда, когда распределение D инволютивно.*

Утверждения теоремы 1 также справедливы в следующих двух случаях:

1. Подгруппа радикала R является коммутативной (необязательно компактной) подгруппой, а метрика радикала является Ad_R-инвариантной.
2. Подгруппа радикала – произвольная подгруппа в G, а любое векторное поле из $L(G)$ является Ad_R-инвариантным.

Пусть распределение D инволютивно и инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы радикала. В этом случае D является подалгеброй в $L(G)$, и алгебра Ли $L(G)$ изоморфна полупрямому произведению подалгебры D и радикала ρ. Обозначим через H связную подгруппу, порожденную подалгеброй D. Изоморфизма алгебр Ли влечет локальный изоморфизм групп Ли. Следовательно, существует локальный изоморфизм группы G на полупрямое произведение подгрупп H и R. Этот изоморфизм задает локальный гомеоморфизм топологических пространств G и H x R.

Если считать, что подгруппа радикала действует на группе G умножением справа, то можно ввести расслоение $G \xrightarrow{\pi} H$ со слоем R и проекцией π. Будем обозначать это расслоение через L. Если подгруппа радикала R коммутативна, то подалгебра D является плоской связностью расслоения L с формой связности ω из пункта 2 теоремы 1.

Аффинором 1-формы α называется поле эндоморфизмов Φ алгебры Ли $L(G)$ группы G, обладающее следующими свойствами:

1. Для всех X из $L(G)$, $\Phi\mathrm{X} \in D$, а для всех Y из ρ, $\Phi\mathrm{Y} = 0$.
2. Для любых X и Y из $L(G)$, $d\alpha(\Phi\mathrm{X},\Phi\mathrm{Y}) = d\alpha(\mathrm{X},\mathrm{Y})$.
3. Для всех X из $L(G)$, $\Phi^2\mathrm{X} = -\mathrm{X} + \omega(\mathrm{X})$, где ω – форма связности из пункта 2 теоремы 1.
4. 2-форма $d\alpha(\mathrm{X},\Phi\mathrm{Y})$ является положительно определенной для всех X и Y из D.

Аффинор Φ называется левоинвариантным, если он коммутирует с левыми сдвигами на группе G, и биинвариантным, если он коммутирует и с левыми, и с правыми сдвигами на группе G.

Из свойства (3) следует, что если $\mathrm{X} \in D$, то $\Phi^2\mathrm{X} = -\mathrm{X}$, свойства (2) и (3) влекут , что $d\alpha(\Phi\mathrm{X},\mathrm{Y}) = -d\alpha(\mathrm{X},\Phi\mathrm{Y})$ для любых X и Y из $L(G)$, а свойства (1) и (4) влекут, что радикал 2-формы $D\alpha(\mathrm{X},\Phi\mathrm{Y})$ совпадает с ρ и ее сужение на D является римановой метрикой.

Аффинорной метрической структурой g на группе Ли G называется тройка (α,Φ,β) такая, что:

$$g(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = d\alpha(\mathrm{X},\Phi\mathrm{Y}) + \beta(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \text{ для всех } \mathrm{X} \text{ и } \mathrm{Y} \text{ из } L(G),$$

где α – 1-форма с радикалом ρ, Φ – аффинор формы α и β – метрика радикала ρ.

Аффинорная метрическая структура называется левоинвариантной, если тензорные поля α,Φ,β являются левоинвариантными, и биинвариантной, если эти тензорные поля являются биинвариантными.

Пусть $d\alpha_\Phi$ – сужение формы $d\alpha(\mathrm{X},\Phi\mathrm{Y})$ на D, распределение D инволютивно, и H – подгруппа, порожденная подалгеброй D. Тогда метрика $d\alpha_\Phi$ является метрикой на базе расслоения L, а метрика радикала β_h, $h \in H$ задает метрику в каждом слое над точкой $h \in H$.

Простейшим примером аффинорной метрической структуры является контактная метрическая структура на нечетномерной группе Ли. В этом случае, радикал имеет размерность 1. Любая кэлерова метрическая структура на четномерной односвязной группе Ли является аффинорной метрической структурой с нулевым радикалом и финором, совпадающим с комплексной структурой на группе.

Теорема 2. *Левоинвариантная аффинорная метрическая структура* $g=(\alpha,\Phi,\beta)$ *является* Ad_R*-инвариантной тогда и только тогда, когда для любого h из подгруппы радикала R,* $\mathrm{Ad}_h \circ \Phi = \Phi \circ \mathrm{Ad}_h$ *и* $\mathrm{Ad}^*_h \beta = \beta$.

Теорема 3. *Пусть R – подгруппа радикала левоинвариантной 1-формы* α *и* $g=(\alpha,\Phi,\beta)$ *-* Ad_R*-инвариантная аффинорная метрическая структура. Тогда распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы R.*

Приведенные выше понятия и результаты имеют аналоги в теории контактных метрических структур. Следующая теорема не имеет аналога для контактных метрических структур.

Теорема 4. *Пусть подгруппа радикала левоинвариантной неконтактной 1-формы* α, $g=(\alpha,\Phi,\beta)$ *-* Ad_R*-инвариантная аффинорная метрическая структура на расслоении L и* ∇ *- связность Леви-Чивита метрики g. Тогда:*

1. *Подалгебра D =* $\mathrm{rad}\,\beta$ *является связностью расслоения L. В случае, когда подгруппа радикала коммутативна, связность D является плоской и форма связности имеет вид:*

$$\omega(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{m} g(\mathrm{X}, E_i) E_i \,,$$

где $E_i, \ldots, E_m$ *- фиксированный базис радикала формы* α.

2. *Подгруппа радикала является вполне геодезическим подмногообразием группы G, т. е. образовано всевозможными геодезическими выходящими из единицы группы G и касательными к* ρ.

3. *Сужение* ∇ *на D есть связность Леви-Чивита метрики* $d\alpha_\Phi$ *на подгруппе H, порожденной подалгеброй D.*

Если аффинорная метрическая структура g = (α,Φ,β) является Ad_H-инвариантной, где *H* – связная подгруппа, порожденная подалгеброй *D*, то сужение связности ∇ на радикал ρ есть связность Леви-Чивита метрики β.

Е.С. Корнев, кандидат физико-математических наук, ведущий инженер кафедры математического анализа Кемеровского государственного университета.