АФФИНОРНЫЕ СТРУКТУРЫ НА АЛГЕБРОИДАХ ЛИ

Евгений Корнев

Пусть M – многообразие класса C^∞ и E – векторное расслоение над M на котором задана структура алгеброида Ли, т. е. определена операция взятия скобки Ли $[\sigma, \tau]$ двух сечений σ и τ расслоения E, обладающая свойствами: существует непрерывное отображение $\psi : E \to TM$ линейное на слоях и такое, что $[\psi\,\sigma, \psi\,\tau] = \psi[\sigma, \tau]$; для любой функции $f \in C^\infty(M), [\sigma, f\tau] = (\psi\,\sigma)(f)\tau + f[\sigma, \tau]$. Действие сечения σ на функцию f определяется как $\sigma(f) = (\psi\,\sigma)(f)$.

Пусть α – 1-форма на алгеброиде Ли E. Наличие операции взятия скобки ли любых двух сечений векторного расслоения E позволяет определить на алгеброиде Ли внешний дифференциал $d\alpha$ стандартным способом:

$$d\alpha(\sigma, \tau) = \sigma(\alpha(\tau)) - \tau(\alpha(\sigma)) - \alpha([\sigma, \tau]).$$

Радикалом 1-формы α в точке $x \in M$ называется множество $\mathrm{rad}\alpha_x$ всех элементов $\sigma \in E_x : i_\sigma d\alpha = 0$, где i_σ – внутреннее произведение сечения σ на внешнюю форму. 1-форма α называется регулярной, если распределение $\mathrm{rad}\alpha$ имеет постоянный ранг на M. Для незамкнутой регулярной 1-формы α ее радикал является векторным подрасслоением в E, которое обозначается $\mathrm{rad}\alpha$.

Пусть D – фиксированное дополнительное к подрасслоению $\mathrm{rad}\alpha$ векторное подрасслоение в $E : E = D \oplus \mathrm{rad}\alpha$. При наличии на E римановой метрики D всегда можно выбрать как ортогональное дополнение радикала относительно этой метрики. Можно доказать, что вне зависимости от ранга $\mathrm{rad}\alpha$ подрасслоение D всегда имеет четный ранг.

Аффинором ассоциированным с незамкнутой регулярной 1-формой α называется непрерывное поле Φ послойных эндоморфизмов векторного расслоения E, удовлетворяющее следующим свойствам:

(1) $\ker \Phi = \mathrm{rad}\alpha$.
(2) $\Phi^2|_D = -\,\mathrm{id}$.
(3) $d\alpha \circ \Phi = d\alpha$.
(4) Для любого сечения $\sigma, d\alpha(\sigma, \Phi\sigma) \geqslant 0$.

Теорема 1. *Пусть g – риманова метрика на алгеброиде Ли E, α незамкнутая регулярная 1-форма на E и Φ – поле, сохраняющих метрику g, послойных эндоморфизмов E, такое что для любых двух сечений $\sigma, \tau, d\alpha(\sigma, \tau) = g(\Phi\sigma, \tau)$. Тогда Φ есть аффинор ассоциированный с 1-формой α на E.*

Пара α, Φ, где α – незамкнутая регулярная 1-форма с ненулевым радикалом, Φ – ассоциированный с 1-формой α аффинор, называется аффинорной структурой на алгеброиде Ли. Аффинорная структура однозначно определяется незамкнутой регулярной 1-формой α с ненулевым радикалом, выбором подрасслоения D и комплексной структурой J на D ассоциированной с замкнутой 2-формой $d\alpha$. обратно, ограничение аффинора Φ на подрасслоение D задает на D комплексную структуру ассоциированную с симплектической формой $d\alpha$ на D. Необходимое условие существования на алгеброиде Ли аффинорной структуры дает следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть E – алгеброид Ли ранга $\geqslant 3$ и $e(\Lambda^2(E))$ – класс Эйлера векторного расслоения внешних 2-форм на E, а $w_1(D)$ – первый класс Штифеля-Уитни подрасслоения*

Работа поддержена грантом РФФИ # 12-01-00873-а,
а также президентским грантом по поддержке научных школ # НШ-544.2012.1.

D. Тогда, если на алгеброиде Ли E существует аффинорная структура, то $e(\Lambda^2(E)) = w_1(D) = 0$.

Пусть E – алгеброид Ли ранга $r \geqslant 3$ и на многообразии M существует набор из r глобальных линейно независимых сечений $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ векторного расслоения E. Тогда, на E можно построить метрику g_0 относительно которой этот набор сечений образует ортонормированный базис слоя в каждой точке $x \in M$. Пусть α незамкнутая регулярная 1-форма на E с радикалом ранга k и $n = r - k$. обозначим через D ортогональное дополнение радикала относительно метрики g_0. Положим, при $i \leqslant n,\ \sigma_i \in D$, а при $n < i \leqslant r,\ \sigma \in \mathrm{rad}\alpha$, $d\alpha(\sigma_i, \sigma_j) = a_{ij}$. Тогда, если выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{r} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij},$$

то поле послойных эндоморфизмов $\Phi : \Phi\sigma_i = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}\sigma_k$ есть аффинор ассоциированный с 1-формой α и мы получаем аффинорную структуру на алгеброиде Ли E.

Понятие аффинора можно обобщить следующим образом: Пусть α – незамкнутая регулярная 1-форма на алгеброиде Ли E, D – подрасслоение в $E : E = D \oplus \mathrm{rad}\alpha$ и λ– произвольное вещественное число. λ-аффинором ассоциированным с 1-формой α называется непрерывное поле Φ_λ послойных эндоморфизмов E, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\Phi_\lambda|_{\mathrm{rad}\alpha} = \lambda\,\mathrm{id}$.
(2) $\Phi_\lambda^2|_D = -\,\mathrm{id}$.
(3) $d\alpha \circ \Phi_\lambda|_D = d\alpha|_D$.
(4) Для любого сечения $\sigma, d\alpha(\sigma, \Phi_\lambda\sigma) \geqslant 0$.

Очевидно, что при $\lambda = 0$ 0-аффинор это – обычный аффинор. Также легко проверить, что λ-аффинор сохраняет 2-форму $d\alpha$ не только на D, но и на всем E.

Кемеровский государственный университет, Кемерово, 650043, Россия
E-mail address: q148@mail.ru