УДК 514.763

Е. С. Корнев

Субкэлеровы структуры и кэлеровы подмногообразия

В работе рассматривается метод получения кэлеровых подмногообразий в произвольных вещественных многообразиях с помощью субкэлеровых структур. Субкэлеровы структуры определяются как частный случай субтвисторных структур, которые в свою очередь являются обобщением субримановых, кэлеровых и твисторных структур. Показано, когда субтвисторная структура является субкэлеровой, а когда нет. Отдельно рассмотрены субкэлеровы структуры на группах Ли и алгеброидах Ли.

Ключевые слова: субтвисторная структура, субкэлерова структура, кэлерово подмногообразие, кэлерова структура.

§ 1. Введение

На дифференцируемых многообразиях четной размерности активно изучаются симплектические и кэлеровы структуры. В основу таких структур положена невырожденная кососсиметричная 2-форма на многообразии. В [1] Были введены субкомплексные и субтвисторные структуры, которые обобщают понятие почти кэлеровой и кэлеровой структуры для случая вырожденной кососимметричной 2-формы на вещественном многообразии произвольной размерности. Фундаментальной 2-формой субтвисторной структуры является регулярная вырожденная кососимметричная 2-форма, для которой определены понятия радикала и рабочего расслоения. Субтвисторные структуры с замкнутой фундаментальной 2-формой и инволютивным рабочим расслоением есть частный случай субтвисторных структур - субкэлеровы структуры. В [2] было описано расслоение субтвисторных структур, которое является обобщением твисторного расслоения, и получены некоторые примеры, как сечение этого расслоения. Субкэлеровы структуры с фундаментальной 2-формой $d\alpha$, где $d\alpha$ – внешний дифференциал 1-формы α на многообразии произвольной размерности, были рассмотрены в [3,4,5], там же получены некоторые однородные примеры субтвисторных и субкэлеровых структур. Целью данной работы является показать, как с помощью субкэлеровых структур можно получать кэлеровы подмногообразия в вещественных многообразиях произвольной размерности. В отличии от кэлеровой или твисторной структуры, субтвисторная или субкэлерова структура определена для многообразий любой, а не только четной, размерности. Это позволяет получать кэлерову структуру не на самом многообразии, а на его подмногообразии четной размерности. Помимо этого, субтвисторные и субкэлеровы структуры являются обобщением кэлеровых, субримановых, твисторных, симплектических и контактных структур, поскольку здесь фундаментальная форма может быть вырожденной,, и перечисленные структуры есть частный случай субтвисторных структур. Субкэлеровы структуры также позволяют описывать локальную геометрию многообразий. В частности, в данной работе показано, что наличие на вещественном многообразии произвольной размерности субкэлеровой структуры позволяет локально представить многообразие, как прямое или полупрямое произведения подмногообразий.

В § 2 приведены необходимые сведения и конструкции для субтвисторных структур. В § 3 рассмотрен частный случай субтвисторных структур - субкэлеровы структуры. В § 4 вводится важное понятие тензора кручения субтвисторной структуры, и показано как этот тензор позволяет получать субкэлеровы структуры и кэлеровы подмногообразия, а также описывать локальную геометрию многообразий. В разделах 5 и 6 отдельно рассмотрены субкэлеровы структуры на группах Ли и алгеброидах Ли, а также построены примеры субкэлеровых структур, которые показывают, что вещественное многообразие может не допускать кэлерову структуру, но допускать субкэлерову структуру, а следовательно и кэлеровы подмногообразия.

§ 2. Субтвисторные структуры

Здесь мы определим понятие субтвисторной структуры и напомним некоторые результаты полученные в [1].

Пусть M – вещественное многообразие размерности $\geqslant 3$, и Ω – ненулевая билинейная форма на M. Внутренним произведением векторного поля X на M и билинейной формы Ω называется 1-форма $I_X\,\Omega : I_X\,\Omega(Y) = \Omega(X, Y$ для любого векторного поля Y на M.

Определение 2.1. Радикалом билинейной формы Ω в точке $x \in M$ называется касательное подпространство $\mathrm{rad}\Omega_x = \{v \in T_xM : I_v\,\Omega_x = 0\}$.

Радикалом билинейной формы Ω на многообразии M называется распределение касательных подпространств $\mathrm{rad}\Omega = \bigcup_{x\in M} \mathrm{rad}\Omega_x$.

Билинейная форма Ω называется регулярной, если $\mathrm{rad}\Omega$ есть регулярное распределение постоянного ранга на M.

Для радикала кососимметричной ненулевой 2-формы получен следующий результат (см. [1,3]):

Теорема 2.2. *Пусть Ω – ненулевая кососимметричная регулярная 2-форма с радикалом ранга r на многообразии M размерности $n \geqslant 3$. Тогда:*

1) Если n четно, то и r четно, и $0 \leqslant r \leqslant n-2$;
2) Если n нечетно, то и r нечетно, и $1 \leqslant r \leqslant n-2$.

Поскольку разность любых целых чисел одинаковой четности всегда есть четное число, из теоремы 2.2 следует, что ранг любого распределения касательных подпространств, дополнительных к $\mathrm{rad}\Omega$, всегда четный. Рабочим расслоением для билинейной формы Ω на многообразии M называется распределение D касательных подпространств, дополнительных к $\mathrm{rad}\Omega$, такое что ограничение Ω на D есть невырожденная билинейная форма. Легко видеть, что $TM = D \oplus \mathrm{rad}\Omega$, и билинейная форма Ω не вырождена тогда и только тогда, когда $\mathrm{rad}\Omega = \{0\}$.

Определение 2.3. Пусть Ω – вырожденная ненулевая кососимметричная регулярная 2-форма на многообразии M, и D – рабочее расслоение для Ω. Аффинором, ассоциированным с 2-формой Ω, называется непрерывное поле Φ эндоморфизмов касательных пространств на M, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\ker \Phi = \mathrm{rad}\Omega$;
2) $\Phi^2|_D = -\,\mathrm{id}$, где id – поле тождественных операторов на M;
3) $\Phi^*\Omega = \Omega \circ \Phi = \Omega$;
4) Для любого векторного поля X на M $\Omega(X, \Phi X) \geqslant 0$.

В [1] показано, что на римановом многообразии аффинор, ассоциированный с кососимметричной регулярной 2-формой , можно определить эквивалентным образом.

Предложение 2.4. *Пусть Ω – кососимметричная регулярная ненулевая 2-форма на вещественном многообразии M с рабочим расслоением D, g – риманова метрика на M, и Φ – непрерывное поле эндоморфизмов касательных подпространств на M, удовлетворяющее условиям:*

$$\begin{aligned} \Omega(X,Y) = g(\Phi X, Y), X, Y \in C^1(TM),\\ g(\Phi X, \Phi Y) = g(X,Y), X, Y \in C^1(D). \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда Φ есть аффинор, ассоциированный с 2-формой Ω.

Пусть Ω – вырожденная кососимметричная регулярная 2-форма на многообразии M с рабочим расслоением D. Метрикой радикала для Ω называется симметричная вырожденная билинейная форма β на M, такая что $\mathrm{rad}\beta = D$ и ограничение β на $\mathrm{rad}\Omega$ есть скалярное произведение в слоях расслоения $\mathrm{rad}\Omega$. Если Φ – аффинор, ассоциированный с 2-формой Ω, то из свойства 4 определения 2.3 следует, что билинейная форма

$$g : g(X,Y) = \Omega(X, \Phi X, Y) + \beta(X,Y), \ X, Y \in C^1(TM) \tag{2}$$

есть риманова метрика на M. Обратно, если g – риманова метрика на M, и A – проекция $TM \to \mathrm{rad}\Omega$, то билинейная форма $\beta = g \circ A$ есть метрика радикала на M. Заметим, что из теоремы 2.2 следует, что на вещественном многообразии размерности 2 любая кососимметричная 2-форма либо нулевая, либо не вырождена.

Определение 2.5. Субтвисторной структурой на вещественном многообразии M размерности $\geqslant 3$ называется набор объектов (Ω, D, Φ, β), где Ω – коссимметричная регулярная 2-форма на M, D – рабочее расслоение для Ω, Φ – аффинор, ассоциированный с 2-формой Ω, и β – метрика радикала для Ω.

В случае, когда $\mathrm{rad}\Omega = \{0\}$ имеем $D = TM$, Φ есть почти комплексная структура, положительно ассоциированная с 2-формой Ω, $\beta = 0$, а риманова метрика g из равенства (2) есть почти эрмитова метрика на M. Если также $d\Omega = 0$ и Φ есть комплексная структура на M, то (Ω, Φ, g) есть кэлерова структура на M. Если $\mathrm{rad}\Omega \neq \{0\}$ и D есть вполне неголономное распределение на M, то (D, g) , где g – риманова метрика из равенства (2), есть субриманова структура на M.

Сейчас мы приведем пример субтвисторной структуры с радикалом максимально возможного ранга.

Пусть M – вещественное риманово многообразие размерности $n \geqslant 3$ с римановой метрикой g, и X, Y – векторные поля на M ортогональные и линейно независимые в каждой точке $x \in M$. Эти векторные поля порождают 1-формы $\alpha = I_X\, G, \beta = I_Y\, g$, которые также линейно независимы в каждой точке $x \in M$. Тогда $\Omega = \alpha \wedge \beta$ есть регулярная внешняя 2-форма на M с радикалом $\ker\alpha \cup \ker\beta$. Поскольку $\operatorname{rank}(\ker\alpha) = \operatorname{rank}(\ker\beta) = n-1$, имеем $\operatorname{rank}(\mathrm{rad}\Omega) = n-2$. ортогональное дополнение D относительно метрики g к $\mathrm{rad}\Omega$ есть рабочее расслоение на M. Определим аффинор Φ следующим образом:

$$\Phi X = Y,\ \Phi Y = -X,\ \Phi\big|_{\mathrm{rad}\Omega} = 0.$$

Поскольку Φ удовлетворяет равенствам (1), из предложения 2.4 следует, что Φ действительно есть аффинор, ассоциированный с 2-формой Ω. Полагая $\beta = g \circ A$, где A – проекция $TM \to \mathrm{rad}\Omega$, получаем субтвисторную структуру (Ω, D, Φ, β) на M с радикалом ранга $n-2$.

Поскольку любое паракомпактное многообразие допускает риманову метрику, получаем:

Предложение 2.6. *Пусть M – паракомпактное многообразие размерности $n \geqslant 3$. Любой глобальный 2-репер (2-корепер) на M порождает на M субтвисторную структуру с радикалом ранга $n-2$.*

В [2] доказано, что на четырехмерной сфере S^4 не существует субтвисторных структур с радикалом ранга 0 или 2,, поскольку расслоение субтвисторных структур над S^4 не допускает глобального сечения. Таким образом, S^4 не допускает почти эрмитовых и почти кэлеровых структур. Особый класс субтвисторных структур представляют субтвисторные структуры с замкнутой фундаментальной 2-формой и рабочим расслоением, для которого существует интегральное подмногообразие, ограничение на которое субтвисторной структуры дает кэлерову структуру. Рассмотрим далее такие структуры.

§ 3. Субкэлеровы структуры

Здесь мы рассмотрим частный случай субтвисторных структур - субкэлеровы структуры. Субкэлеровы структуры являются обобщением понятия кэлеровой структуры для вещественных многообразий произвольной размерности и позволяют получать кэлеровы подмногообразия.

Пусть M – вещественное многообразие размерности $n \geqslant 3$ и (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура на M. Как показано в § 2, ранг распределения D равен $2r$. Если рабочее расслоение D является вполне голономным, то многообразие M является слоением, т. е. через каждую точку $x \in M$ проходит интегральное подмногообразие $Q_x : T_yQ_x = D_y$ для всех $y \in Q_x$. Внешняя 2-форма Ω не вырождена на подмногообразии Q_x. Ограничение аффинора Φ на Q_x задает почти комплексную структуру J на подмногообразии Q_x, сохраняющую невырожденную 2-форму Ω. Если почти комплексная структура J

интегрируема, т. е. на подмногообразии Q_x существуют локальные комплексные координаты, согласованные с действием почти комплексной структуры, то J есть комплексная структура на подмногообразии Q_x. Таким образом Q_x становится комплексным подмногообразием в M. В случае замкнутой 2-формы Ω Q_x есть кэлерово подмногообразие в M.

Определение 3.1. Субкэлеровой структурой на вещественном многообразии M называется субтвисторная структура $(Omega, D, \Phi, \beta)$ вместе с подмногообразием $Q \subset M$, такая что $d\Omega = 0$, и Q – интегральное подмногообразие в $M : T_xQ = D_x$ в в любой точке $x \in Q$, а ограничение аффинора Φ на Q является комплексной структурой на Q.

Замечание 3.2. Из определения субкэлеровой структуры и теоремы Фробениуса следует, что субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и инволютивным рабочим расслоением определяет субкэлерову структуру, если ограничение аффинора на одно из интегральных подмногообразий для рабочего расслоения есть комплексная структура на этом подмногообразии.

В [1] доказано, что радикал вырожденной замкнутой регулярной кососимметричной 2-формы на многообразии M есть вполне голономное распределение на M. Из определения 3.1 и теоремы Фробениуса получаем:

Предложение 3.3. *Если вещественное многообразие M допускает субкэлерову структуру, (Ω, D, Φ, β), то $\mathrm{rad}\Omega$ есть инволютивное распределение касательных подпространств на M, и M есть слоение с римановыми слоями.*

Простейшим примером многообразия, не допускающего кэлерову структуру, но допускающего субкэлерову структуру является прямое произведение кэлерова многообразия на вещественное риманово многообразие нечетной размерности. В качестве нетривиального примера многообразия с субкэлеровой структурой рассмотрим главное расслоение над кэлеровым многообразием.

Пусть M – кэлерово многообразие вещественной размерности $2n$, P – главное расслоение над M со структурной группой G и проекцией $\pi : P \to M$, (Θ, J, h) – кэлерова структура на M, где h – кэлерова метрика на M J – комплексная структура на M, сохраняющая метрику h, и Θ – фундаментальная 2-форма кэлеровой структуры. Пусть D – связность в главном расслоении P, ω – форма связности D, и ω_k, $1 \leqslant k \leqslant r = \dim(G)$ – координатные 1-формы формы связности, такие что $d\omega_k \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r = 0$ для любого k. Последнее условие эквивалентно условию $d\omega_k|_D = 0$ для всех k. Используя инвариантное определение внешнего дифференциала 1-формы (см. [3,4]), получаем, что D есть инволютивное распределение на многообразии P. Для любой точки $u \in P$ имеем: $T_uP = D_u \oplus T_uG,$. Ограничение отображения $d\pi$ на распределение D есть изоморфизм касательных пространств, а ограничение $d\pi$ на распределение TG есть нулевое отображение. Положим $\Omega = \Theta \circ d\pi$, $\Phi X = (d\pi^{-1} \circ J \circ d\pi)X$ при $X \in C^1(D)$, $\Phi X = 0$ при $X \in C^1(TG)$. Получаем, что Ω есть замкнутая регулярная 2-форма на P с радикалом TG, а Φ есть аффинор, ассоциированный с 2-формой Ω. Из теоремы Фробениуса следует, что через каждую точку

$u \in P$ проходит интегральное подмногообразие $Q_u : TQ_u\big|_{Q_u} = D\big|_{Q_u}$. Поскольку ограничение аффинора Φ на подмногообразие Q_u есть почти комплексная структура на Q_u, изоморфная комплексной структуре J на M, ограничение Φ на подмногообразие Q_u есть комплексная структура на Q_u, сохраняющая внешнюю 2-форму Ω. На группе Ли G всегда существует правоинвариантная риманова метрика g_0. Полагая $\beta\big|_{\mathrm{rad}\Omega} = g_0$, $\mathrm{rad}\beta = D$, получаем метрику радикала β на P. Теперь мы получаем субкэлерову структуру (Ω, D, Φ, β) на P с радикалом ранга r.

Заметим, что если главное расслоение P над кэлеровым многообразием M допускает связность с замкнутой формой связности, то выполняются все условия примера выше, и кэлерова структура на M вместе с такой связностью порождает субкэлерову структуру на многообразии P. Таким образом получаем:

Предложение 3.4. *Пусть P – главное расслоение над кэлеровым многообразием M, r – размерность слоя расслоения P, и D – связность на P с замкнутой формой связности. Тогда кэлерова структура на M и связность D порождают субкэлерову структуру с радикалом ранга r на P.*

Замечание 3.5. Если главное расслоение P вещественной размерности $2n+1$ над кэлеровым многообразием M допускает связность с замкнутой формой связности, то P не допускает кэлеровых структур, но, в силу предложения 3.4, допускает субкэлерову структуру, и многообразие P содержит кэлеровы подмногообразия.

Для субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) на вещественном многообразии M аффинор Φ есть комплексная структура в слоях рабочего расслоения D. Комплексификация рабочего расслоения D есть сумма Уитни подрасслоений $D_{(1,0)}$ и $D_{(0,1)}$, где $D_{(1,0)}$ – распределение векторных полей типа (1,0), $D_{(0,1)}$ – распределение векторных полей типа (0,1) (см. [6, глава 9]). Это позволяет получить условие, когда субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой индуцирует субкэлерову структуру:

Предложение 3.6. *Пусть (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура на вещественном многообразии M, такая что $d\Omega = 0$, и распределения $D, D_{(0,1)}, D_{(0,1)}$ на M инволютивны. Тогда эта субтвисторная структура индуцирует на M субкэлерову структуру, и любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ есть кэлерово подмногообразие в M.*

Доказательство. Поскольку вещественное распределение D инволютивно, из теоремы Фробениуса следует, что через каждую точку $x \in M$ проходит интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$. Из определения 2.3 следует, что Φ есть почти комплексная структура на подмногообразии Q. Поскольку комплексификация касательного расслоения TQ лежит в комплексификации рабочего расслоения D, условия инволютивности распределений $D_{(1,0)}$ и $D_{(0,1)}$ влечет, что Φ есть комплексная структура на Q (см. [6, глава9]). Таким образом, выполнено определение 3.1, и Q есть кэлерово подмногообразие в M.

Следующий результат дает пример субтвисторной структуры, которая не индуцирует субкэлерову структуру:

Предложение 3.7. *Пусть* $(\Omega, D, \Phi, \beta) : D\Omega = 0$ – *субтвисторная структура на вещественном многообразии* M, *и* $[D, D]_x \subseteq \mathrm{rad}\Omega_x$ *в каждой точке* $x \in M$. *Тогда для рабочего расслоения* D *не существует интегральных подмногообразий* $Q : TQ = D|_Q$.

Доказательство. Предположим, что в M существует интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$. Тогда для любой точки $x \in Q$ $[D, D]_x = [TQ, TQ]_x \subseteq T_xQ = D_x$, что противоречит условию $[D, D]_x \subseteq \mathrm{rad}\Omega_x$.

Пусть (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура на вещественном многообразии M. Поскольку аффинор Φ задает ориентацию в слоях рабочего расслоения D, первый класс Штиффеля-Уитни векторного расслоения D равен 0. Если векторное расслоение E допускает глобальное сечение, всюду отличное от нуля, то класс Эйлера векторного расслоения E равен 0 (см. [7]). Пусть $\lambda^2(M, \mathbb{R})$ – расслоение вещественных кососимметричных 2-форм на M. Поскольку фундаментальная 2-форма Ω есть глобальное сечение векторного расслоения $\lambda^2(M, \mathbb{R})$, всюду отличное от нуля, получаем следующие необходимые условия существования на многообразии субкэлеровой или субтвисторной структуры:

Предложение 3.8. *Пусть* M – *вещественное многообразие размерности* $\geqslant 3$. *Если на* M *существует субтвисторная (субкэлерова) структура* (Ω, D, Φ, β), *то* $w_1(D) = e(\lambda^2(M, \mathbb{R})) = 0$, *где* $w_1(D)$ – *первый класс Штиффеля-Уитни векторного расслоения* D, *а* $e(\lambda^2(M, \mathbb{R}))$ – *класс Эйлера векторного расслоения* $\lambda^2(M, \mathbb{R})$.

Как было отмечено в § 2, четырехмерная сфера не допускает субтвисторных структур, а значит не допускает и субкэлеровых структур. Инвариантные примеры субкэлеровых структур с точной фундаментальной 2-формой на группах Ли и однородных пространствах можно найтив [3] и [5]. Для того, чтобы получить другие примеры субкэлеровых структур, нам потребуется дополнительный объект, к описанию которого мы перейдем далее.

§ 4. Тензоры кручения субтвисторной структуры

Здесь мы определим понятие тензора кручения и индуцированного кручения, с помощью которых Можно описать когда субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой индуцирует субкэлерову структуру, а вещественное многообразие локально представляется как прямое произведение кэлерова подмногообразия и риманого подмногообразия.

Определение 4.1. Тензором кручения субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) на многообразии M называется непрерывное тензорное поле N типа $(2, 1)$, определенное на паре векторных полей $X, Y \in C^\infty(TM)$ следующим образом:

$$N(X, Y) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y],$$

где $[X, Y]$ – скобка Ли векторных полей X и Y.

Из определения 4.1 и определения 3.1 следует, что для любого интегрального подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ ограничение тензора кручения N на Q есть тензор Нейенхейса почти комплексной структуры $\Phi|_Q$. Интегрируемость этой почти комплексной структуры на Q эквивалентна условию $N|_Q = 0$ (см. [6, глава 9]).

Теорема 4.2. *Пусть M – вещественное многообразие размерности $n \geqslant 3$, и (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура на M с радикалом ранга $r \geqslant 1$, замкнутой фундаментальной 2-формой Ω и нулевым тензором кручения. Тогда рабочее расслоение D есть вполне голономное распределение на M, любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ есть кэлерово подмногообразие комплексной размерности $\frac{n-r}{2}$, и $(Q, \Omega, D, \Phi, \beta)$ есть субкэлерова структура на M.*

Доказательство. Будем обозначать проекцию векторного поля X на распределение $\mathrm{rad}\Omega$ через X_R. Из определения 2.3 следует, что $\Phi(TM) = D$. Если $X, Y \in C^\infty(D)$, то из определения 4.1 получаем:

$$N_R(X, Y) = [\Phi X, \Phi Y]_R.$$

Условие $N = 0$ влечет $N_R = 0$, откуда $[\Phi X, \Phi Y]_R = 0$. Поскольку Φ есть линейный автоморфизм слоев рабочего расслоения D, получаем, что распределение D инволютивно. По теореме Фробениуса инволютивное распределение вполне голономно, а следовательно, через каждую точку $x \in M$ проходит подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$. Ограничение аффинора Φ на любое такое подмногообразие есть почти комплексная структура на Q, и ограничение тензора кручения N на Q есть ее тензор Нейенхейса. Условие $N = 0$ влечет, что Φ есть комплексная структура на Q, и Q есть кэлерово подмногообразие комплексной размерности $\frac{n-r}{2}$. Таким образом выполнено определение 3.1, и утверждение доказана.

В [3] введено понятие нормальной аффинорной метрической структуры. Здесь мы обобщим это понятие для субтвисторной структуры с произвольной фундаментальной 2-формой. Такие субтвисторные структуры дают класс субтвисторных структур с нулевым тензором кручения.

Определение 4.3. Субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) называется нормальной, если для любых векторных полей $X \in C^\infty(TM), Y \in C^\infty(D)$ $[X, \Phi Y] = \Phi[X, Y]$.

Теорема 4.4. *Пусть M – вещественное многообразие размерности $\geqslant 3$, (Ω, D, Φ, β) – нормальная субтвисторная структура на M, и $d\Omega = 0$. Тогда рабочее расслоение D есть вполне голономное распределение на M, любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ есть кэлерово подмногообразие в M, и множество всех гладких сечений рабочего расслоения D есть идеал в алгебре векторных полей на M.*

Доказательство. Пусть N – тензор кручения субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β). Из определения 4.1 для любых $X, Y \in C^\infty(D)$ имеем:

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y] = \\ &= \Phi^2[X, Y] - \Phi^2[X, Y] - \Phi^2[X, Y] + \Phi^2[X, Y] = 0. \end{aligned}$$

В силу определения 2.3, для любых $X \in C^\infty(D), Y \in C^\infty(\mathrm{rad}\Omega)$ имеем:

$$N(X,Y) = -\Phi[\Phi X, Y] + \Phi^2[X,Y] = 0.$$

Поскольку $N\big|_{\mathrm{rad}\Omega} = 0$, окончательно получаем, что $N = 0$ на M. Из теоремы 4.2 получаем, что рабочее расслоение D есть вполне голономное распределение на M, и любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ есть кэлерово подмногообразие в M.

Так как D – вполне голономное распределение на M, из теоремы Фробениуса следует, что D есть инволютивное распределение на M. Поскольку для любого $X \in C^\infty(TM)$ $\Phi X \in C^\infty(D)$. Для любых $X \in C^\infty(D), Y \in C^\infty(\mathrm{rad}\Omega)$ имеем:

$$[\Phi X, Y] = \Phi[X,Y] \in C^\infty(D).$$

Поскольку Φ есть линейный автоморфизм слоев рабочего расслоения D, распределение D инволютивно, и $C^\infty(TM) = C^\infty(D) \oplus C^\infty(\mathrm{rad}\Omega)$, получаем, что $C^\infty(D)$ есть идеал в $C^\infty(TM)$.

Замечание 4.5. Из теоремы 4.4 и предложения 3.3 следует, что для нормальной субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) : $d\Omega = 0$ всегда существуют интегральные подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$, $R : TR = \mathrm{rad}\Omega|_R$, однако M локально изометрично $Q \times R$ только тогда, когда $[D, \mathrm{rad}\Omega] = 0$.

Субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) с ненулевым радикалом на многообразии M всегда задает разложение касательного расслоения TM в прямую сумму распределений касательных подпространств D и $\mathrm{rad}\Omega$. С этой парой распределений можно связать структуру почти произведения

$$\psi : \psi|_D = \Phi^2 = -\,\mathrm{id},\ \psi\big|_{\mathrm{rad}\Omega} = \mathrm{id}\,.$$

Для структуры почти произведения ψ определен тензор кручения p_ψ:

$$P_\psi(X,Y) = [\psi X, \psi Y] + [X,Y] - \psi[\psi X, Y] - \psi[X, \psi Y],$$
$$X, Y \in C^\infty(TM).$$

Будем называть тензор P_ψ *тензором индуцированного кручения* субтвисторной структуры. Условие $P_\psi = 0$ эквивалентно тому, что многообразие M локально диффеоморфно прямому произведению подмногообразий $Q : TQ = D|_Q$ и $R : TR = \mathrm{rad}\Omega|_R$ (см. [8]). В случае, когда $d\Omega = 0$, Если тензор кручения этой субтвисторной структуры равен 0 на M, то из теоремы 4.2 следует, что $(Q, \Omega, D, \Phi, \beta)$ есть субкэлерова структура на M. Заметим, что ограничение на подмногообразие Q симметричной билинейной формы

$$\Omega_\Phi : \Omega_\Phi(X,Y) = \Omega(X, \Phi Y),\ X, Y \in C^\infty(TM)$$

есть кэлерова метрика на Q, ограничение метрики радикала β на подмногообразие R есть риманова метрика на R, а метрика $g = \Omega_\Phi + \beta$ есть метрика прямого произведения на $Q \times R$. Таким образом, получаем:

Предложение 4.6. *Если вещественное многообразие M допускает субкэлерову структуру с радикалом ранга $r \geqslant 1$ и нулевым тензором индуцированного кручения, то M локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия Q коразмерности r и риманова подмногообразия R размерности r.*

Тензоры кручения и индуцированного кручения субтвисторной структуры можно объединить в один объект.

Определение 4.7. Пусть (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура на вещественном многообразии M, $g = \Omega_\Phi + \beta$ – ассоциированная риманова метрика на M, $T_{\mathbb{C}}M = \mathbb{C} \otimes TM$ – комплексификация касательного расслоения TM, N – тензор кручения этой субтвисторной структуры, и p_ψ – тензор индуцированного кручения. Комплексным кручением субтвисторной структуры называется трилинейная форма τ на M:

$$\tau(X, Y, Z) = g(N(X, Y), Z) + ig(p_\psi(X, Y), Z),$$
$$X, Y, Z \in C^\infty(T_{\mathbb{C}}M),\ i = \sqrt{-1}.$$

Сразу из определения следует, что $\tau = 0$ тогда и только тогда, когда $N = P_\Psi = 0$. Из теоремы 4.2 и предложения 4.6 получаем:

Следствие 4.8. *Если вещественное многообразие M допускает субтвисторную структуру с радикалом ранга $r \geqslant 1$, замкнутой фундаментальной 2-формой и нулевым комплексным кручением, то M локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия Q коразмерности r и риманова подмногообразия R размерности r.*

Заметим, что дивизор комплексного кручения субтвисторной структуры на вещественном многообразии есть в точности множество нулей комплексной трилинейной формы. Поскольку множество нулей любой полилинейной формы всегда есть замкнутое множество, и для связного многообразия M любое непустое открытое и замкнутое подмножество совпадает с M, получаем:

Следствие 4.9. *Если дивизор комплексного кручения субтвисторной структуры $(\Omega, D, \Phi, \beta) : d\Omega = 0$ на вещественном связном многообразии M есть открытое множество в M, то (Ω, D, Φ, β) индуцирует субкэлерову структуру на M, распределение D вполне голономно, и M локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ и риманова подмногообразия $R : TR = \mathrm{rad}\Omega|_R$.*

Обобщая полученые выше результаты, получаем:

Следствие 4.10. *Пусть (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура с радикалом ранга $\geqslant 1$, замкнутой фундаментальной 2-формой, тензором кручения N, тензором индуцированного кручения p_ψ и комплексным кручением τ на вещественном многообразии M размерности $\geqslant 3$.*

1) *Если $N = 0$, то D есть вполне голономное распределение на M, и любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ есть кэлерово подмногообразие в M;*
2) *Если $p_\psi = 0$, то распределение D вполне голономно, и M локально изометрично прямому произведению почти кэлерова подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ и риманова подмногообразия $R : TR = \mathrm{rad}\Omega|_R$;*
3) *Если $\tau = 0$, то распределение D вполне голономно, и M локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ и риманова подмногообразия $R : TR = \mathrm{rad}\Omega|_R$.*

Пусть (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура на гладком многообразии M, g – риманова метрика на M из равенства (2), и ∇ – связность Леви-Чивитты метрики g. Обозначим через ∇^D ограничение связности ∇ на рабочее расслоение D. Для субтвисторной структуры с инволютивным рабочим расслоением, в частности для субкэлеровой структуры, ∇^D есть связность Леви-Чивитты ограничения метрики g на любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$.

Теорема 4.11. *Пусть (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура на вещественном многообразии M размерности $\geqslant 3$, и P_ψ – тензор индуцированного кручения этой субтвисторной структуры. Если $\nabla^D\Phi = 0$ и $P_\psi = 0$, то в M существуют кэлерово подмногообразие Q и риманово подмногообразие R такие, что M локально изометрично $Q \times R$, и $(Q, \Omega, D, \Phi, \beta)$ есть субкэлерова структура на M.*

Доказательство. Из условия $P_\psi = 0$ следует, что распределения D и $\mathrm{rad}\Omega$ инволютивны (см. [8]). Следствие 4.10 дает, что в M существуют римановы подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$, $R : TR = \mathrm{rad}\Omega|_R$, и M локально изометрично $Q \times R$. Условие $\nabla^D\Phi = 0$ влечет, что Φ есть комплексная структура на Q и $d\Omega|_Q = 0$ (см. [6, глава 9]). Поскольку $TQ = D|_Q$ и регулярная 2-форма Ω может принимать ненулевые значения только на рабочем расслоении D, получаем $d\Omega = 0$ на M. Таким образом, выполнены все условия определения субкэлеровой структуры, и Q есть кэлерово подмногообразие в M.

Замечание 4.12. Очевидно, что теорема 4.11 остается справедливой, если условие $\nabla^D\Phi = 0$ заменить на условие $\nabla\Phi = 0$. При этом, ограничение $\nabla\Phi$ на $\mathrm{rad}\Omega$ всегда равно 0, когда $\mathrm{rad}\Omega$ есть инволютивное распределение.

§ 5. Инвариантные субкэлеровы структуры на группах Ли

Здесь мы рассмотрим инвариантные относительно групповой операции субкэлеровы структуры. Такие структуры удобны тем, что дифференциальны задачи можно свести к алгебраическим, а также получить больше примеров субкэлеровых структур.

Пусть G – вещественная группа Ли размерности $\geqslant 3$, $L_g : G \to G : L_g(x) = gx$, для любого $x \in G$ – отображение левого сдвига на группе G, и $dL_g : T_xG \to T_xG$ – дифференциал отображения L_g. Субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) на группе Ли G называется левоинвариантной, если выполнены следующие условия: Ω и β – левоинвариантные 2-формы на группе G, D – левоинвариантное распределение на G, и для любого $g \in G$ $dL_g \circ \Phi = \Phi \circ dL_g$. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы Ли G, а $\exp : \mathfrak{g} \to G$ – экспоненциальное отображение. Из предложения 3.3 получаем:

Следствие 5.1. *Пусть $(\Omega, D, \Phi, \beta$ – левоинвариантная субкэлерова структура с радикалом ранга $\geqslant 1$ на группе Ли G. Тогда* $\mathrm{rad}\Omega$ *есть подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, порождающая связную подгруппу $R = \exp(\mathrm{rad}\Omega)$ в G.*

Подгруппа $R = \exp(\mathrm{rad}\Omega)$ называется *подгруппой радикала.* Подгруппа радикала для субтвисторных структур с точной фундаментальной 2-формой подробно изучена в [3]. Полученный для таких структур в [3] результат, можно легко обобщить для левоинвариантных субтвисторных структур с произвольной замкнутой фундаментальной 2-формой. Будем обозначать через Ad_g дифференциал внутреннего автоморфизма A_g, порожденного элементом g на группе Ли G.

Предложение 5.2. *Пусть $(\Omega, D, \Phi, \beta) : d\Omega = 0$ – левоинвариантная субтвисторная структура на группе Ли G с нетривиальной подгруппой радикала R. Если метрика радикала β R-биинвариантна, то рабочее расслоение D Ad_R-инвариантно, и $[D, \mathrm{rad}\Omega] \subseteq D$.*

Левоинвариантная субкэлерова структура на односвязной группе Ли позволяет описать локальную геометрию этой группы.

Теорема 5.3. *Пусть G – вещественная группа Ли размерности $\geqslant 3$, и $(\Omega, D, \Phi, \beta) : d\Omega = 0$ – левоинвариантная субтвисторная структура на G с тензором кручения N.*

1) *Если $N = 0$, то D есть подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и $\exp(D)$ есть кэлерово подмногообразие в G;*
2) *Если группа Ли G односвязна, $N = 0$, и $\mathrm{Ad}^*_R \beta = \beta$, то группа G локально изоморфна полупрямому произведению*

$$R \rtimes Q, \;\; R = \exp(\mathrm{rad}\Omega), \;\; Q = \exp(D).$$

Доказательство. Из теоремы 4.2 следует, что рабочее расслоение D есть подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и ограничение субтвисторной структуры на подгруппу $Q = \exp(D)$ есть кэлерова структура на Q. Если $\mathrm{Ad}^*_R \beta = \beta$, то из следствия 5.1 и предложения 5.2 получаем, что $\mathrm{rad}\Omega$ есть подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и $[D, \mathrm{rad}\Omega] \subseteq D$. Таким образом алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна полупрямому произведению подалгебр $\mathrm{rad}\Omega \rtimes D$. Поскольку для односвязной группы Ли изоморфизм алгебр Ли влечет локальный изоморфизм групп Ли (см. [9]), полагая $R = \exp(\mathrm{rad}\Omega)$, для односвязной группы Ли G получаем, что G локально изоморфна $R \rtimes Q$.

Сейчас мы приведем пример группы Ли, на которой не существует кэлеровой структуры, но существует левоинвариантная субкэлерова структура.

Пример 1. Пусть H – вещественная группа Ли размерности $2n$, L – вещественная группа Ли размерности 1, и $G = H \rtimes L$ – полупрямое произведение этих групп. Поскольку $\dim(G) = 2n + 1$, на G не существует кэлеровой структуры. Пусть ξ – левоинвариантное векторное поле на группе H, и α – левоинвариантная замкнутая 1-форма на H, такая что $\alpha(\xi) = 1$. Пусть Z – левоинвариантное векторное поле на группе L, порождающее алгебру Ли группы L и $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли группы Ли H. Для любого $X \in \mathfrak{h}$ положим $[X, Z] = \alpha(x)\, Z$. Получаем $[\xi, Z] = Z$, т. е. векторные поля ξ, Z порождают двумерную подалгебру D в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Векторное поле Z порождает на группе G левоинвариантную

1-форму $\eta : \eta(Z) = 1,\ \eta(X) = 0,\ X \in \mathfrak{h}$. Имеем:

$$d\eta(X, Y) = -\tfrac{1}{2}\,\eta([X, Y]),\ X, Y \in \mathfrak{g},$$
$$d\eta(X, Z) = 0,\ X \in \ker\alpha,$$
$$d\eta(\xi, Z) = -\tfrac{1}{2}.$$

Получаем, что $\mathrm{rad}(d\eta) = \ker\alpha$ и D – есть рабочее расслоение для 2-формы $d\eta$. Пусть b – левоинвариантная риманова метрика на группе Ли G. Определим аффинор Φ на G с помощью равенства (1) из предложения 2.4. Поскольку рабочее расслоение D есть подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, группа G содержит двумерную подгруппу $Q = \exp(D)$, и ограничение аффинора Φ на Q есть левоинвариантная комплексная структура на Q. Определим на G левоинвариантную метрику радикала $\beta : \beta\big|_{\ker\alpha} = b,\ \mathrm{rad}\beta = D$. Теперь мы получаем на G левоинвариантную субкэлерову структуру $(Q, d\eta, D, \Phi, \beta)$ с радикалом максимального ранга.

Пусть $(\Omega, D, \Phi, \beta) : d\Omega = 0$ – левоинвариантная субтвисторная структура на группе Ли G с подгруппой радикала R. Аффинор Φ называется Ad_R-инвариантным, если для любого $h \in R$ $\mathrm{Ad}_h \circ\Phi = \Phi \circ \mathrm{Ad}_h$. Субтвисторная структура называется Ad_R-инвариантной, если билинейные формы Ω, β, аффинор Φ и рабочее расслоение D Ad_R-инвариантны. Из предложения 5.2 вытекает, что условие Ad_R-инвариантности рабочего расслоения следует из условия Ad_R-инвариантности метрики радикала β.

Теорема 5.4. *Любая левоинвариантная субтвисторная структура* $(\Omega, D\Phi, \beta)$: $d\Omega = 0$ *на группе Ли* G *с нетривиальной подгруппой радикала* R *и* Ad_R*-инвариантным аффинором* Φ *является нормальной и порождает левоинвариантную субкэлерову структуру на* G.

Доказательство. Поскольку $R = \exp(\mathrm{rad}\Omega)$, для любого $h \in R$ существует $X \in \mathrm{rad}\Omega : h = \exp(X)$. Из условия $\mathrm{Ad}_h \circ\Phi = \Phi \circ \mathrm{Ad}_h$ для любого

$$Y \in \mathfrak{g}\ [X, \Phi Y] = \Phi[X, Y],$$

то есть выполнено определение 4.3. Из теоремы 4.4 получаем, что подгруппа $Q = \exp)D)$ есть кэлерово подмногообразие в G, такое что $(Q, \Omega, D, \Phi, \beta)$ есть левоинвариантная субкэлерова структура на G.

Из теоремы 5.4 и теоремы 5.3 получаем:

Следствие 5.5. *Пусть* $(\Omega, D, \Phi, \beta) : d\Omega = 0$ – Ad_R*-инвариантная субтвисторная структура на односвязной группе Ли* G *с нетривиальной подгруппой радикала* R*. Тогда группа* G *локально изоморфна полупрямому произведению* $R \rtimes Q$*, где* $Q = \exp(D)$*, и ограничение этой субтвисторной структуры на* Q *есть левоинвариантная кэлерова структура.*

Для компактных групп Ли левоинвариантную субкэлерову структуру можно построить, имея только вырожденную левоинвариантную замкнутую 2-форму.

Пример 2. Пусть G – группа Ли размерности $\geqslant 3$, и Ω – левоинвариантная замкнутая кососимметричная 2-форма на группе G с нетривиальной компактной подгруппой радикала R. На группе G всегда можно построить левоинвариантную Ad_R-инвариантную риманову метрику ρ (см. [10]). Для замкнутой 2-формы $\mathrm{rad}\Omega$ есть подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть D – ортогональное, относительно метрики ρ, дополнение к подалгебре $\mathrm{rad}\Omega$ в $\mathfrak{g}$. Поскольку метрика ρ Ad_R-инвариантна, D есть Ad_R-инвариантное рабочее расслоение (см. [10]). Определим аффинор Φ, ассоциированный с 2-формой Ω, с помощью равенств (1) в предложении 2.4. В [3] показано, что такой аффинор является Ad_R-инвариантным. Определим метрику радикала β на G, полагая $\beta|_R = \rho$, $\mathrm{rad}\beta = D$. Мы получили Ad_R-инвариантную субтвисторную структуру (Ω, D, Φ, β) на G. Из теоремы 5.4 следует, что эта субтвисторная структура нормальна, и подгруппа $Q = \exp(D)$ есть кэлерово подмногообразие в G. То есть мы получили Ad_R-инвариантную субкэлерову структуру на G.

Поскольку подгруппа радикала есть замкнутая подгруппа, и любая замкнутая подгруппа компактной группы компактна, получаем:

Предложение 5.6. *Пусть G – компактная группа Ли размерности $\geqslant 3$. Любая замкнутая левоинвариантная кососимметричная 2-форма с нетривиальной подгруппой радикала R порождает на G Ad_R-инвариантную субкэлерову структуру, а следовательно порождает подгруппу Q, которая является кэлеровым подмногообразием в G.*

Замечание 5.7. Заметим, что левоинвариантная субкэлерова структура на группе Ли G порождает подгруппу, которая всегда является кэлеровым подмногообразием, но невсегда является комплексной подгруппой, так как для комплексной подгруппы требуется, чтобы групповая операция была голоморфной.

§ 6. Субкэлеровы структуры на алгеброидах Ли

Здесь мы обобщим понятие субкэлеровой структуры для пространства сечений векторного расслоения. Мы будем рассматривать частный случай векторных расслоений - алгеброиды Ли, поскольку для них всегда определен внешний дифференциал кососимметричных полилинейных форм на сечениях.

Пусть E – векторное расслоение над многообразием M. Будем говорить, что на векторном расслоении определена полилинейная форма, если она действует на сечениях этого векторного расслоения. Если Ω – вырожденная кососимметричная 2-форма на векторном расслоении E, то ее рабочим расслоением называется подрасслоение D над M, на котором 2-форма Ω не вырождена, т. е. условие $I_\sigma \Omega = 0$ выполнено только при $\sigma = 0$, где $\sigma \in C^\infty(E)$. Ассоциированный с 2-формой Ω аффинор и метрика радикала определяются точно также, как для многообразий в § 2. Это позволяет определить субтвисторную структуру на векторном расслоении также, как для многообразий в § 2. Чтобы определить понятие субкэлеровой структуры на векторном расслоении, необходимо наличие внешнего дифференциала для кососимметричных форм на сечениях векторного расслоения. Далее мы будем рассматривать частный случай векторных расслоений, для которых всегда определен внешний дифференциал.

Алгеброидом Ли над многообразием M называется векторное расслоение E над M, такое что на множестве сечений этого расслоения задана операция скобки Ли сечений $[\sigma, \tau]$, $\sigma, \tau \in C^\infty(E)$, и задано отображение $A : C^\infty(E) \to$

$C^\infty(TM)$, которое является гомоморфизмом относительно скобки Ли, и для любой функции f на M и любых сечений $\sigma, \tau \in C^\infty(E)$

$$[\sigma, f\tau] = (A\sigma)(f)\tau + f[\sigma, \tau].$$

Отображение A называется *якорем* алгеброида Ли. В [4] показано, что на алгеброиде Ли можно определить внешний дифференциал, а следовательно понятия замкнутых и точных кососимметричных форм. Это позволяет определить понятие субкэлеровой структуры на алгеброиде Ли:

Определение 6.1. Субкэлеровой структурой на алгеброиде Ли E называется субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) на пространстве сечений векторного расслоения E, такая что $d\Omega = 0$ и D есть инволютивное подрасслоение в E.

Также как в § 4 для субтвисторной структуры на алгеброиде Ли можно определить тензор кручения и тензор индуцированного кручения. Также, как теорему 4.2 для многообразий, для алгеброидов Ли можно доказать следующий результат:

Теорема 6.2. *Пусть (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и нулевым тензором кручения на алгеброиде Ли E ранга $\geqslant 3$. Тогда эта субтвисторная структура есть субкэлерова структура на E, D есть подалгеброид в E, и Φ есть комплексная структура в слоях векторного расслоения D.*

Сейчас мы приведем пример, когда субкэлерова структура на алгеброиде Ли позволяет получить кэлерово подмногообразие в базовом многообразии M.

Предложение 6.3. *Пусть E – алгеброид Ли ранга $\geqslant 3$ над вещественным многообразием M размерности $\geqslant 3$, (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и нулевым тензором кручения на E, и A – якорь этого алгеброида Ли. Если ограничение якоря A на рабочее расслоение D есть изоморфизм на свой образ, то в M существует кэлерово подмногообразие.*

Доказательство. Из теоремы 6.2 следует, что рабочее расслоение D инволютивно, и Ω есть невырожденная замкнутая кососимметричная 2-форма на подалгеброиде D. Пусть L – образ рабочего расслоения D под действием отображения A. Поскольку A есть изоморфизм $D \to L$, отображение A обратимо на L и L есть инволютивное распределение четного ранга касательных подпространств на M. По теореме Фробениуса через каждую точку $x \in M$ проходит интегральное подмногообразие $Q : TQ = L|_Q$. Ограничение поля линейных автоморфизмов $J = A \circ \Phi \circ A^{-1}$ на Q есть почти комплексная структура на Q. Поскольку Тензор Нейенхейса этой почти комплексной структуры равен 0 (он индуцирова нулевым тензором кручения субтвисторной структуры на E), почти комплексная структура J интегрируема. Определим на Q кососимметричную 2-форму $\eta = \Omega|_D \circ A^{-1}$. Поскольку $TQ = L|_Q$, η есть замкнутая невырожденная 2-форма на Q. Из определения аффинора Φ получаем, что J есть комплексная структура на Q, положительно ассоциированная с 2-формой η. Получаем, что симметричная 2-форма

$$h : h(X, Y) = \eta(X, JY),\ X, Y \in C^\infty(TQ)$$

есть кэлерова метрика на Q и Q есть кэлерово подмногообразие в M.

В качестве примера субкэлеровой структуры на алгеброиде Ли рассмотрим алгеброиды Ли в векторном расслоении $TM \oplus T^*M$, где T^*M – кокасательное расслоение над M. Будем обозначать через L_X производную Ли на M в направлении векторного поля X. Для любых сечений $X+\xi, Y+\theta,\ X, Y \in C^\infty(TM),\ \xi, \theta \in C^\infty(T^*M)$ определена операция скобки Куранта:

$$[X+\xi, Y+\theta] = [X, Y] + \underset{X}{L}\,\theta - \underset{Y}{L}\,\xi - \frac{1}{2}\, d(\underset{X}{I}\,\theta - \underset{Y}{I}\,\xi),$$

где $[X, Y]$ – скобка Ли векторных полей X, Y на многообразии M. Скобка Куранта не является скобкой Ли на множестве сечений расслоения $TM \oplus T^*M$, так как не удовлетворяет тождеству Якоби. Однако в $TM \oplus T^*M$ существуют подрасслоения, являющиеся алгеброидами Ли относительно скобки Куранта.

Пусть K – инволютивное распределение касательных подпространств на M четного ранга, и ϵ – замкнутая кососимметричная 2-форма на M, такая что ее ограничение на сечения распределения K не вырождено. Определим в $TM \oplus T^*M$ подрасслоение

$$E = \{X + \xi : X \in C^\infty(K), \xi|_K = \underset{X}{I}\,\epsilon\}.$$

В [11] показано, что E есть алгеброид Ли ранга $n = \dim(M)$ относительно скобки Куранта, где якорь есть проекция векторного расслоения E на касательное подрасслоение TK.

Рассмотрим на E кососимметричную 2-форму

$$\begin{gathered}\Omega : \Omega(X+\xi, Y+\theta) = \tfrac{1}{2}\left(\theta(X) - \xi(Y)\right) = \epsilon(X, Y),\\ X, Y \in C^\infty(K),\ \xi|_K = I_X\,\epsilon,\ \theta|_K = I_Y\,\epsilon.\end{gathered}$$

Отсюда получаем:

$$\mathrm{rad}\Omega = \{\xi \in T^*M : \xi|_K = \underset{0}{I}\,\epsilon = 0\}.$$

Пусть $(\sigma, \tau),\ \sigma, \tau \in C^\infty(E)$ – скалярное произведение в слоях векторного расслоения E. Тогда ортогональное дополнение D к $\mathrm{rad}\Omega$ относительно этого скалярного произведения есть рабочее расслоение для 2-формы Ω, а ограничение этого скалярного произведения на подрасслоение $\mathrm{rad}\Omega$ порождает метрику радикала β на E. Поскольку 2-форма ϵ не вырождена и замкнута на сечениях инволютивного распределения K, отображение $\epsilon : C\infty(K) \to C\infty(D) : \epsilon X = X + I_X\,\epsilon$ есть изоморфизм $K \mapsto D$ (см. [11]), получаем, что D есть инволютивное относительно скобки Куранта векторное подрасслоение в E. Используя определение внешнего дифференциала для кососимметричных 2-форм на алгеброиде Ли, для любых сечений $\sigma, \tau, \rho \in C^\infty(E)$ имеем:

$$\begin{gathered}6\, d\Omega(\sigma, \tau, \rho) = \sigma(\Omega(\tau, \rho)) - \tau(\Omega(\sigma, \rho)) + \rho(\Omega(\sigma, \tau)) -\\ -\Omega([\sigma, \tau], \rho) + \Omega([\sigma, \rho], \tau) - \Omega([\tau, \rho], \sigma).\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь мы считаем, что сечение векторного расслоения действует на функцию с помощью якоря алгеброида Ли E. Используя равенство (3), определение скобки Куранта и вид сечений алгеброида Ли E, получаем $d\Omega = 0$.

Пусть J – комплексная структура в слоях распределения K, сохраняющая ориентацию слоев. Определим аффинор Φ на алгеброиде Ли следующим образом:

$$\Phi(X+\xi) = JX - J^*\xi,\ J^*\xi = \xi \circ J.$$

Легко проверить, что поле эндоморфизмов Φ слоев векторного расслоения E удовлетворяет всем свойствам определения 2.3. Теперь мы получаем субкэлерову структуру (Ω, D, Φ, β) на алгеброиде Ли $E \subset TM \oplus T^*M$. Заметим, что объекты ϵ, K, J можно было взять из некоторой субкэлеровой структуры на базовом многообразии M, когда ϵ есть фундаментальная 2-форма субкэлеровой структуры, K – инволютивное рабочее расслоение на M, и J есть ограничение аффинора, ассоциированного с 2-формой ϵ. таким образом получаем:

Предложение 6.4. *Пусть (Ω, D, Φ, β) – субкэлерова структура с инволютивным рабочим расслоением на вещественном многообразии M размерности $\geqslant 3$. Тогда векторное расслоение*

$$E = \{X+\xi \in TM \oplus T^*M : X \in C^\infty(D), \xi \in T^*m : \xi|_D = \underset{X}{I}\,\Omega\}$$

есть алгеброид Ли относительно скобки Куранта и допускает субкэлерову структуру, индуцированную субкэлеровой структурой на многообразии M.

В силу теоремы 4.2 получаем:

Следствие 6.5. *Субтвисторная структура на вещественном многообразии M размерности $\geqslant 3$ с замкнутой фундаментальной 2-формой и нулевым тензором кручения индуцирует в $TM \oplus T^*M$ алгеброид Ли относительно скобки Куранта и субкэлерову структуру на этом алгеброиде Ли.*

Примеры субкэлеровых структур с точной фундаментальной 2-формой на алгеброидах Ли можно найти в [4].

Список литературы

[1] Корнев Е. С., “Субкомплексные и субкэлеровы структуры”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:5 (2016), 1062–1077.

[2] Корнев Е. С., “Субтвисторные структуры и субтвисторное расслоение”, *Сиб. матем. журн.*, **60**:6 (2019), 1310–1323.

[3] Корнев Е. С., “Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **53**:1 (2012), 107–123.

[4] Корнев Е. С., “Аффинорные структуры на векторных расслоениях”, *Сиб. матем. журн.*, **55**:6 (2014), 1283–1296.

[5] Корнев Е. С., Славолюбова Я. В., “Инвариантные аффинорные и субкэлеровы структуры на однородных пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:1 (2016), 67–84.

[6] Кобаяси Ш., Номидзу К., *Основы дифференциальной геометрии (В 2 т.)*, Наука, Москва, 1981.

[7] Милнор Дж., Сташеф Дж., *Характеристические классы*, Мир, Москва, 1979.

[8] Nagarag M., “Note on the locally product and almost locally product structures”, *Proceedings of the Indian Academy of Sciences - Section A*, **65** (1967), 270–282.

[9] Серр Ж.-П., *Группы Ли и алгебры Ли*, Мир, Москва, 1969.

[10] Бессе А., *Многообразия Эйнштейна (В 2 т.)*, Мир, Москва, 1990.

[11] Gualtieri M., *Generalized Complex Geometry*, Preprint on website arxiv.org, http://arxiv.org/pdf/math/0401221.pdf, 2004.

Е. С. Корнев (E. S. Kornev)
Кемеровский государственный университет
E-mail: q148@mail.ru