УДК 514.763

Е. С. Корнев

Вырожденные полилинейные формы и эрмитовы и пара-эрмитовы структуры

В работе описан способ получения семейств комплексных и паракомплексных структур на вещественных многообразиях с помощью вырожденных кососимметричных полилинейных форм. для построения таких структур используются кососимметричная форма с нетривиальным радикалом. Получено семейство почти комплексных структур на шестимерной сфере, отличных от структуры Кэли. получены семейства эрмитовых и пара-эрмитовых структур на некоторых шестимерных многообразиях.

Ключевые слова: эрмитова структура, пара-эрмитова структура, интегрируемая почти комплексная структура, радикал полилинейной формы.

§ 1. Введение

Для вещественных многообразий четной размерности хорошо известна задача построения комплексной, эрмитовой или кэлеровой структуры. Это позволяет задать на вещественном многообразии комплексные координаты и эрмитову метрику. Эрмитова структура на вещественном многообразии M размерности $2n$ – это пара (J, h), где h – риманова метрика на M, а J – комплексная структура на M, сохраняющая метрику h. Хорошо известны примеры многообразий, как допускающих эрмитову структуру, так и нет. Позднее на вещественных многообразиях размерности $2n$ с псевдоримановой метрикой было введено понятие пара-эрмитовой структуры. Пара-эрмитова структура на вещественном многообразии M размерности $2n$ – это пара (Φ, g), где g – псевдориманова метрика сигнатуры (n, n) на M, и Φ – паракомплексная структура на M такая, что $g \circ \Phi = -g$. Обзор известных свойств и результатов для пара-эрмитовых структур можно найти в [1] и [2]. Для эрмитовых и пара-эрмитовых структур определено понятие фундаментальной 2-формы, которая есть невырожденная кососимметричная билинейная форма на многообразии. Эрмитовы и пара-эрмитовы структуры с замкнутой фундаментальной 2-формой называются кэлеровыми (пара-кэлеровыми) структурами. в [3] и [4] понятия комплексной, кэлеровой и контактной структуры были обобщены для вырожденных 1-форм и 2-форм на вещественных многообразиях любой размерности или векторных расслоениях. Такие структуры называются субтвисторными структурами, субкэлеровыми структурами и аффинорными метрическими структурами. В [5] описан метод построения почти комплексной структуры на шестимерных многообразиях с помощью невырожденной кососимметричной 3-формы. Однако в [5] не рассматриваются кососимметричные

3-формы с ненулевым множеством вырождения, которое мы будем называть *радикалом.*

Основной целью данной работы является описание способа построения эрмитовой или пара-эрмитовой структуры на вещественном многообразии M размерности $2n$ с помощью вырожденной кососимметричной n-формы с радикалом ранга n на M. Этот Метод позволяет получать эрмитовы и пара-эрмитовы структуры на многообразиях, на которых не удавалось построить такие структуры другими методами. Так, например, в [6] показано, что почти комплексная структура на любом шестимерном многообразии в семимерном евклидовом пространстве, полученная с помощью умножения октав Кэли, не интегрируема. А в [7] на шестимерных псевдосферах построены интегрируемые комплексные и паракомплексные структуры Кэли. Однако в [6] и [7] не доказано, что шестимерная сфера или псевдосфера, а также шестимерное произведение сфер, не допускают интегрируемых почти комплексных структур отличных от структур Кэли. В данной работе с помощью вырожденной кососимметричной формы на четномерном многообразии получено семейство почти эрмитовых структур на шестимерной сфере, отличных от структуры Кэли, а также получено семейство эрмитовых структур на прямом произведении двумерной сферы и четырехмерной сферы. Для построения таких семейств используется связь между эрмитовыми или пара-эрмитовыми структурами на многообразии M и вырожденными полилинейными формами описанная в § 4.

В разделе 2 мы приводим необходимые сведения и результаты из теории эрмитовых и пара-эрмитовых структур. В разделе 3 получены и описаны некоторые результаты для радикала вырожденной кососимметричной полилинейной формы. В разделе 4 описана связь между эрмитовыми (пара-эрмитовыми) структурами и кососимметричными полилинейными формами с нетривиальным радикалом. В этом разделе мы докажем основную теорему, которая утверждает, что существование на многообразии размерности $2n$ комплексной или паракомплексной структуры эквивалентно существованию замкнутой внешней n-формы с радикалом ранга n. В разделе 5 построено семейство почти комплексных структур на шестимерной сфере, отличных от структуры Кэли, а также приведены критерии, когда такие структуры могут быть интегрируемыми. Там же доказано, что на шестимерной сфере не существует почти паракомплексных структур. В разделе 6 изучен вопрос существования эрмитовых и пара-эрмитовых структур на других шестимерных многообразиях. В частности доказано, что на прямом произведении двумерной сферы и четырехмерной сферы существует семейство эрмитовых структур, но не существует пара-эрмитовых структур.

§ 2. Эрмитовы и пара-эрмитовы структуры

В этом разделе мы приведем основные понятия и сведения из теории эрмитовых и пара-эрмитовых структур. Подробные обзоры результатов для эрмитовых и пара-эрмитовых структур можно найти в [1, 2], а также в 8, глава 9].

Пусть M – вещественное многообразие класса C^∞ размерности $2n$, h – риманова метрика на M, а g – псевдоэрмитова метрика на M сигнатуры (n,n). Будем обозначать касательное расслоение над M через TM, а кокасательное расслоение над M через T^*M. *Почти комплексной структурой* на многообразии M называется непрерывное поле J автоморфизмов касательных пространств на M такое, что $J^2 = -\mathrm{id}$, где id – поле тождественных линейных операторов в слоях касательного расслоения TM. *Почти паракомплексной структурой* на многообразии M называется непрерывное поле Φ автоморфизмов касательных пространств на M такое, что $\Phi^2 = \mathrm{id}$, и ранг подрасслоений собственных подпространств для собственных значений ± 1 равен n. *Почти эрмитовой структурой* на M называется пара (J,h), где J – почти комплексная структура на M, такая что $h \circ J = h$. *Почти пара-эрмитовой структурой* на M называется пара (Φ, g), где Φ – почти паракомплексная структура на M, такая что $g \circ \Phi = -g$.

Комплексификацией вещественного векторного пространства V называется комплексное векторное пространство $V_{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$. Комплексная структура в вещественном векторном пространстве V не имеет собственных значений, но в комплексифицированном векторном пространстве $V_{\mathbb{C}}$ имеет два собственных значения $\pm i$, $i = \sqrt{-1}$. В каждой точке $x \in M$ почти комплексная структура задает комплексную структуру в комплексификации касательного пространства T_xM, а почти паракомплексная структура задает паракомплексную структуру в касательном пространстве T_xM. Однако не для всех таких структур существуют комплексные или паракомплексные локальные координаты, согласованные с действием этих структур на локальных векторных полях. Почти комплексная структура J называется интегрируемой или комплексной, если для каждой точки $x \in M$ существуют локальные вещественные координаты $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) : \partial y_k = J \partial x_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$, где ∂x_k обозначает локальные базисные векторные поля, действующие на гладкую функцию f как $\partial x_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_k}$. Аналогично определяется понятие интегрируемой почти паракомплексной структуры, которую называют паракомплексной структурой. Почти эрмитова структура (J,h) называется эрмитовой, а почти пара-эрмитова структура (Φ, g) называется пара-эрмитовой, если почти комплексная структура J или почти паракомплексная структура Φ интегрируема.

Распределение D касательных подпространств на многообразии M называется *регулярным*, если $\dim(D(x)) = \mathrm{const}$ на M, и для любой точки $x \in M$ существует открытая окрестность U, такая что в U существует непрерывный локальный базис распределения $D|_U$. Распределение, которое не является регулярным, называется *сингулярным распределением.*

Пусть (J,h) – почти эрмитова структура на многообразии M. Рассмотрим комплексное векторное расслоение $T_{\mathbb{C}}M = TM \otimes \mathbb{C}$. Поскольку почти комплексная структура J продолжается на $T_{\mathbb{C}}M$, и имеет только собственные значения $\pm i$, $i = \sqrt{-1}$, получаем:

$$T_{\mathbb{C}}M = V_+ \oplus V_-,$$

где V_+ – распределение собственных подпространств, соответствующих собственному значению i, V_- – распределение собственных подпространств, соответствующих собственному значению $-i$. Характеристический многочлен для

J имеет вид $(z^2+1)^n$, откуда $\dim(V_+(x)) = \dim(V_-(x)) = n$ в любой точке $x \in M$. Продолжим метрику h на $T_{\mathbb{C}}M$, считая, что для любых вещественных векторных полей $X, Y \in C^\infty(TM)$ и любых комплексных функций $\lambda, \mu \in C^\infty(M)$:

$$h(\lambda X, \mu Y) = \lambda\overline{\mu}\, h(X, Y),$$

где $\overline{\mu}$ обозначает комплексное сопряжение. Из условия $h \circ J = h$ следует, что распределения V_+ и V_- ортогональны относительно метрики h. Отсюда следует, что каждой почти эрмитовой структуре соответствует пара ортогональных распределений V_+, V_-. Заметим, что эти распределения могут быть как регулярными, так и сингулярными. Обратно, если расслоение $T_{\mathbb{C}}M$ есть прямая сумма регулярных распределений V_+ и V_- ранга n, то такая пара распределений определяет почти комплексную структуру

$$J : J\big|_{V_+} = i\,\mathrm{id},\ J\big|_{V_-} = -i\,\mathrm{id}\,.$$

Поскольку любое вещественное векторное поле $X \in C^\infty(TM)$ можно представить в виде

$$X = Z_+ + Z_-,\ Z_+ \in C^\infty(V_+), Z_- \in C^\infty(V_-),$$

значение почти комплексной структуры J на вещественном векторном поле X определяется так:

$$JX = i\,(Z_+ - Z_-).$$

Если на M выбрана риманова метрика h_0 и почти комплексная структура J не сохраняет метрику H_0, то всегда можно построить метрику $h = h_0 + h_0 \circ J$, для которой уже выполняется $h \circ J = h$. Таким образом, задание на многообразии M почти эрмитовой структуры равносильно заданию римановой метрики и пары регулярных распределений V_+, V_-, таких что:

$$T_{\mathbb{C}}M = V_+ \oplus V_-,\ \mathrm{rank}(V_+) = \mathrm{rank}(V_-).$$

Из комплексной теоремы Фробениуса и определения распределений V_+, V_- получаем (см. [8, глава 9]):

Предложение 2.1. *Почти эрмитова структура на вещественном четномерном многообразии M является эрмитовой тогда и только тогда, когда распределения собственных подпространств V_+ и V_- инволютивны.*

Теперь мы получаем, что для задания на многообразии M эрмитовой структуры, достаточно задать на M риманову метрику и пару инволютивных регулярных распределений одинакового ранга, прямая сумма которых равна $T_{\mathbb{C}}M$.

Пусть (Φ, g) – почти пара-эрмитова структура на многообразии M. Также, как для почти эрмитовой структуры касательное расслоение TM можно разложить в прямую сумму вещественных распределений $D_+ : \Phi\big|_{D_+} = \mathrm{id}$ и $D_- : \Phi\big|_{D_-} = -\,\mathrm{id}$. Из условия $g \circ \Phi = -g$ следует, что распределения D_+ и D_- есть распределения максимальных изотропных подпространств. Обратно, если на M заданы псевдориманова метрика g_0 сигнатуры (n, n) и пара регулярных распределений D_+ и D_- таких что

$$TM = D_+ \oplus D_-,\ \mathrm{rank}(D_+) = \mathrm{rank}(D_-) = n,$$

то D_+ и D_- определяют почти паракомплексную структуру Φ, для которой они есть распределения собственных подпространств, соответствующих собственным значениям ± 1. Если для метрики g_0 не выполняется условие $g_0 \circ \Phi = -g_0$, то оно будет выполняться для метрики $g = g_0 - g_0 \circ \Phi$, и мы получаем почти пара-эрмитову структуру (Φ, g). Из вещественной теоремы Фробениуса и определения распределений D_+, D_- получаем (см. [1]):

Предложение 2.2. *Почти пара-эрмитова структура на вещественном четномерном многообразии M является пара-эрмитовой тогда и только тогда, когда распределения собственных подпространств D_+ и D_- инволютивны.*

Теперь мы получаем, что для задания на многообразии M пара-эрмитовой структуры, достаточно задать на M псевдориманову метрику сигнатуры (n, n) и пару регулярных инволютивных распределений одинакового ранга, прямая сумма которых равна TM.

Замечание 2.3. Поскольку для паракомпактного многообразия с помощью разбиения единицы всегда можно построить риманову метрику (см. [9]) или псевдориманову метрику, то на паракомпактном многообразии M размерности $2n$ для задания почти эрмитовой или почти пара-эрмитовой структуры достаточно задать разложение комплексифицированного или вещественного касательного расслоения TM в прямую сумму регулярных распределений ранга n. Аналогично, для задания на паракомпактном многообразии M эрмитовой или пара-эрмитовой структуры достаточно задать разложение комплексифицированного или вещественного касательного расслоения TM в прямую сумму инволютивных регулярных распределений ранга n.

§ 3. Радикал полилинейной формы

Пусть M – вещественное многообразие класса C^∞ размерности $n \geqslant 3$, p – положительное целое число, и Ω – p-линейная ненулевая форма на многообразии M. Будем обозначать через $\mathrm{I}_X \Omega$ $(p-1)$-линейную форму на M, полученную заменой в p-линейной форме Ω первого аргумента на векторное поле X. Такую $(p-1)$-линейную форму называют *внутренним произведением* X *и* Ω.

Определение 3.1. При $p \geqslant 2$ радикалом p-линейной формы Ω в точке $x \in M$ называется векторное подпространство

$$\operatorname{rad} \Omega_x = \{v \in T_x M : \mathrm{I}_v \Omega_x = 0\}.$$

При $p = 1$ радикалом 1-формы Ω называется радикал ее внешнего дифференциала $d\Omega$ в точке x. Распределение $\operatorname{rad} \Omega = \bigcup_{x \in M} \operatorname{rad} \Omega_x$ на M называется радикалом p-линейной формы Ω на многообразии M.

p-линейная форма Ω на многообразии M называется регулярной, если $\operatorname{rad} \Omega$ есть регулярное распределение на M.

Заметим, что иногда радикал билилинейной формы Ω называют *ядром* билинейной формы Ω. Для билинейных форм эти термины идентичны, но для 1-форм ядро и радикал есть разные объекты.

Будем говорить, что кососимметричная p-форма Ω, $p \geqslant 2$, не вырождена на многообразии M, если $\operatorname{rad}\Omega = \{0\}$. Для невырожденной кососимметричной 2-формыΩ на многообразии M размерности $2n$ получаем известное свойство: $\Omega^n \neq 0$ на M, а для невырожденной 1-формы η на многообразии M размерности $2n+1$ получаем свойство: $(d\eta)^n \wedge \eta \neq 0$ на M (контактная 1-форма). Из определения 3.1 сразу следует, что на многообразии размерности 2 любая регулярная ненулевая кососимметричная 2-форма не вырождена. Заметим, что для регулярной кососимметричной полилинейной формы Ω с нетривиальным радикалом ограничение формы Ω на любое распределение дополнительное к $\operatorname{rad}\Omega$ всегда не вырождено.

Сейчас мы получим важные свойства для ранга радикала регулярной кососимметричной p-формы.

Предложение 3.2. *Пусть M – паракомпактное многообразие размерности $n \geqslant 3$, тогда для любой ненулевой регулярной кососимметричной p-формы Ω на M $\operatorname{rank}(\operatorname{rad}\Omega) \leqslant n - p$.*

Доказательство. Поскольку на паракомпактном многообразии всегда существует риманова метрика (см. замечание 2.3), Для распределения $\operatorname{rad}\Omega$ на M всегда определено ортогональное дополнение D. Обозначим через X^0 проекцию векторного поля X на $\operatorname{rad}\Omega$, а через X' проекцию векторного поля X на распределение D. Для любых $X_1, \dots, X_p \in C^\infty(TM)$ имеем:

$$\Omega(X_1, \dots, X_p) = \Omega(X_1^0 + X_1', \dots, X_p^0 + X_p') = \Omega(X_1', \dots, X_p').$$

Поскольку любой набор из m векторов в векторном пространстве размерности меньше m всегда есть линейнозависимая система векторов, для любой точки $x \in M$ получаем $\Omega_x(X_1', \dots, X_p') = 0$ при $p > m = n - \operatorname{rank}(\operatorname{rad}\Omega)$. Поскольку Ω – регулярная ненулевая p-форма, получаем, $\operatorname{rank}(\operatorname{rad}\Omega) \leqslant n - p$.

Будем обозначать через $[X, Y]$ скобку Ли векторных полей X, Y на многообразии M.

Предложение 3.3. *Радикал любой замкнутой регулярной кососимметричной p-формы при $p \geqslant 2$ на многообразии M есть инволютивное регулярное распределение на M.*

Доказательство. Воспользуемся определением внешнего дифференциала кососимметричной p-формы Ω. Для любых векторных полей $X_1, \dots, X_{p+1} \in C^\infty(TM)$ имеем:

$$\begin{gathered}(p+1)!\, d\Omega(X_1, \dots, X_{p+1}) = \tfrac{1}{(p+1)!}\big(\textstyle\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k-1} X_k(\Omega(X_1, \dots, \hat{X}_k, \dots, X_{p+1})) + \\ + \textstyle\sum_{k<l}(-1)^{k+l}\Omega([X_k, X_l], \dots, \hat{X}_k, \dots, \hat{X}_l, \dots, X_{p+1})\big),\end{gathered} \tag{1}$$

где $\hat{X}_k$ обозначает пропуск аргумента X_k. Из определения 3.1 для любых $X_1, X_2 \in C^\infty(\operatorname{rad}\Omega)$ и для любых $X_3, \dots, X_{p+1} \in C^\infty(TM)$ получаем, что $X_k(\Omega(X_1, \dots, \hat{X}_k, \dots, X_{p+1})) = 0$ для любого индекса k, и $\Omega([X_k, X_l], \dots, \hat{X}_k, \dots, \hat{X}_l, \dots, X$ 0 при $k \neq 1,\ l \neq 2$. Поскольку $d\Omega = 0$, получаем:

$$\Omega([X_1, X_2], X_3, \dots, X_{p+1}) = 0,$$

т. е. $[X_1, X_2] \in C^\infty(\operatorname{rad}\Omega)$.

Следующий пример показывает, что утверждение обратное предложению 3.3 неверно.

Пример 3.4. Рассмотрим компактное многообразие $M = S^6 \times T^n$, где S^6 – шестимерная сфера, T^n – плоский n-мерный тор. На сфере S^6 существует почти эрмитова структура с фундаментальной 2-формой Ω_0 (см. [6]). Поскольку на шестимерной сфере не существует симплектических структур, а фундаментальная 2-форма почти эрмитовой структуры всегда не вырождена, Ω_0 есть незамкнутая 2-форма на S^6. Продолжим 2-форму Ω_0 до кососимметричной 2-формы Ω на M, полагая

$$\begin{gathered}\Omega(X,Y)\big|_{X,Y\in T(S^6)} = \Omega_0(X,Y),\\ \Omega(X,Y)\big|_{X\in T(S^6),Y\in T(T^n)} = 0,\\ \Omega(X,Y)\big|_{X,Y\in T(T^n)} = 0.\end{gathered}$$

Получаем $\operatorname{rad}\Omega = T(T^n)$, $d\Omega \neq 0$, и $\operatorname{rad}\Omega$ есть инволютивное распределение на M.

В [4] показано, что для любой регулярной вырожденной кососимметричной 2-формы Ω на многообразии M произвольной размерности любое распределение на M, дополнительное к $\operatorname{rad}\Omega$, имеет четный ранг, и ограничение 2-формы Ω на это распределение не вырождено. По теореме Фробениуса, инволютивное распределение на многообразии M интегрируемо, а следовательно M есть слоение с интегральными подмногообразиями в качестве слоев. Теперь из предложения 3.3 получаем:

Следствие 3.5. *Пусть M – вещественное многообразие размерности $n \geqslant 3$, и Ω – регулярная замкнутая кососимметричная 2-форма на M с радикалом ранга $r \geqslant 1$. Тогда M есть слоение со слоями размерности r, а любое подмногообразие в M, трансверсальное слоям, есть симплектическое подмногообразие размерности $n - r$.*

§ 4. Эрмитовы структуры как вырожденные кососимметричные полилинейные формы

Здесь мы опишем связь между эрмитовыми и пара-эрмитовыми структурами и замкнутыми вырожденными регулярными кососимметричными формами.

Пусть M – паракомпактное вещественное многообразие размерности $2n$. В силу замечания 2.3 для задания на M почти эрмитовой структуры достаточно задать на M риманову метрику и разложение комплексифицированного касательного расслоения $T_{\mathbb{C}}M = TM \otimes \mathbb{C}$ в прямую сумму регулярных распределений комплексифицированных касательных подпространств ранга n, а для задания на M почти пара-эрмитовой структуры достаточно задать на M псевдориманову метрику сигнатуры (n,n) и разложение касательного расслоения в прямую сумму регулярных распределений касательных подпространств ранга n. Если такие распределения на M инволютивны, мы получаем эрмитову или пара-эрмитову структуру на M. Будем называть *комплексификацией* кососимметричной вещественной p-формы Ω на многообразии M продолжение формы

Ω на комплексифицированное касательное расслоение $T_{\mathbb{C}}M$. Комплексной кососимметричной p-формой на вещественном многообразии M будем называть кососимметричную p-форму, действующую на сечениях комплексифицированного касательного расслоения $T_{\mathbb{C}}M$.

Предложение 4.1. *Пусть M – вещественное паракомпактное многообразие размерности $2n$.*

1) *Любая регулярная кососимметричная вещественная n-форма на M с радикалом ранга n порождает на M почти пара-эрмитову структуру, а любая регулярная кососимметричная комплексная n-форма на M порождает на M почти эрмитову структуру;*
2) *Любая регулярная замкнутая кососимметричная вещественная n-форма на M с радикалом ранга n порождает на M пара-эрмитову структуру, а любая регулярная замкнутая кососимметричная комплексная n-форма на M порождает на M эрмитову структуру.*

Доказательство. Пусть Ω – комплексная регулярная кососимметричная n-форма на многообразии M с радикалом ранга n. Поскольку на паракомпактном многообразии всегда существует риманова метрика, выберем на M риманову метрику h и продолжим ее на $T_{\mathbb{C}}M$. Обозначим через D ортогональное дополнение к распределению $\operatorname{rad}\Omega$ относительно метрики h. имеем:

$$T_{\mathbb{C}}M = D \oplus \operatorname{rad}\Omega,\ \operatorname{rank}(D) = \operatorname{rank}(\operatorname{rad}\Omega) = n.$$

Задавая почти комплексную структуру и риманову метрику как в разделе 2, получаем на M почти эрмитову структуру. Если n-форма Ω замкнута, то из предложения 3.3 следует, что $\operatorname{rad}\Omega$ есть инволютивное распределение. Без потери общности можно считать, что $\operatorname{rad}\Omega$ есть распределение векторных полей типа (1,0). Так как инволютивность распределения векторных полей типа (1,0) эквивалентна интегрируемости почти эрмитовой структуры (см. [8, глава 9]), получаем доказательство второй части пунктов 1 и 2.

Поскольку на паракомпактном многообразии размерности $2n$ всегда существует псевдориманова метрика сигнатуры (n, n), аналогичным образом получаем доказательство первой части пунктов 1 и 2.

Сейчас мы докажем результат, обратный утверждению 4.1:

Теорема 4.2. *Пусть M – паракомпактное вещественное многообразие размерности $2n$. Любая почти эрмитова структура на M, заданная парой регулярных распределений $V_+, V_- \subset T_{\mathbb{C}}M$ ранга n, порождает комплексную регулярную n-форму на M с радикалом V_+, замкнутую в случае, когда структура является эрмитовой, а любая почти пара-эрмитова структура на M, заданная парой вещественных регулярных распределений D_+, D_- ранга n, порождает на M вещественную регулярную n-форму с радикалом D_+, замкнутую в случае, когда структура является пара-эрмитовой.*

Доказательство. Отождествим вещественное пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с комплексным пространством $\mathbb{C}^n$. Если на многообразии M существует почти эрмитова структура, то для M существует открытое покрытие $\{U\}_{\alpha\in A}$, где U_α – открытое множество в M, диффеоморфное открытому шару в $\mathbb{C}^n$. Пусть

$V_+, V_- \subset T_{\mathbb{C}}M$ – распределения собственных подпространств для собственных значений $i, -i$ соответственно. На каждом открытом множестве U_α существует набор линейно независимых комплексных 1-форм $\xi_1^\alpha, \dots \xi_n^\alpha$, таких что $V_+\big|_{U_\alpha} = \bigcap_{k=1}^n \ker \xi_k^\alpha$. Так как ядро ненулевого линейного функционала всегда имеет коразмерность 1, в $C^\infty\big(V_-\big|_{U_\alpha}\big)$ существуют сечения $Z_1^\alpha, \dots, Z_n^\alpha : \xi_k^\alpha(Z_k^\alpha) = 1$, $\xi_l^\alpha(Z_k^\alpha) = 0$ при $k \neq l$. Отсюда следует, что $\xi_1^\alpha \wedge \dots \wedge \xi_n^\alpha(Z_1^\alpha, \dots, Z_n^\alpha) = \frac{1}{n!}$. Из теоремы о разбиении единицы следует, что для каждого индекса $\alpha \in A$ существует функция $\phi_\alpha \in C^\infty(M)$, такая что $0 < \phi_\alpha(x) \leqslant 1$ для всех $x \in U_\alpha$, $\phi_\alpha(x) = 1$ на некотором замкнутом подмножестве $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$, и $\phi_\alpha(x) = 0$ для всех $x \in M \setminus U_\alpha$. Тогда $\Omega_\alpha = \phi_\alpha \xi_1^\alpha \wedge \dots \wedge \xi_n^\alpha$ есть кососимметричная n-форма на U_α с радикалом $V_+\big|_{U_\alpha}$. Положим $\Omega = \sum_{\alpha \in A} \Omega_\alpha$. Поскольку многообразие M паракомпактно, любая точка $x \in M$ лежит в конечном числе пересечений множеств U_α, а следовательно эта сумма конечна в любой точке, и Ω есть кососимметричная n-форма на M. Заметим, что для любых p-форм ω, θ, таких что $\operatorname{rad}\omega = \operatorname{rad}\theta = V_+$, $\operatorname{rad}(\omega + \theta) = V_+$. Поскольку для любых индексов $\alpha, \beta : U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ $\operatorname{rad}\Omega_\alpha = \operatorname{rad}\Omega_\beta = V_+\big|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, имеем $\operatorname{rad}\Omega = V_+$.

Для эрмитовой структуры распределение V_+ есть инволютивное распределение голоморфных векторных полей, а распределение V_- есть инволютивное распределение антиголоморфных векторных полей. Используя эти факты и равенство (1) из § 3, получаем $\operatorname{rad}\Omega \subset \operatorname{rad}(d\Omega)$. Если $d\Omega \neq 0$, то $\operatorname{rank}(\operatorname{rad}(d\Omega)) \geqslant n$. С другой стороны, из предложения 3.2 следует, что $\operatorname{rank}(\operatorname{rad}(d\Omega)) \leqslant n - 1$. Следовательно $d\Omega = 0$. Свойство $d\Omega = 0$ также можно доказать, используя тот факт, что для любой точки $x \in M$ существует замкнутая окрестность $\bar{V}_\alpha : \Omega\big|_{\bar{V}_\alpha} = \xi_1^\alpha \wedge \dots \wedge \xi_n^\alpha$. Поскольку в этом случае локальные 1-формы $\xi_1^\alpha, \dots, \xi_n^\alpha$ всегда можно выбрать точными.

Аналогично, для почти пара-эрмитовой структуры на M можно построить вещественную регулярную n-форму с радикалом D_+, которая будет замкнутой в случае пара-эрмитовой структуры.

Из предложения 4.1 и теоремы 4.2 получаем:

Следствие 4.3. *Пусть M – паракомпактное вещественное многообразие размерности $2n$. На M существует эрмитова структура с регулярными распределениями собственных подпространств тогда и только тогда, когда на M существует комплексная регулярная кососимметричная замкнутая n-форма с радикалом ранга n, и существует пара-эрмитова структура с регулярными распределениями собственных подпространств тогда и только тогда, когда на M существует вещественная регулярная кососимметричная замкнутая n-форма с радикалом ранга n.*

Получить пример эрмитовой или пара-эрмитовой структуры, полученной с помощью регулярной кососимметричной n-формы с радикалом ранга n позволяет следующий результат:

Предложение 4.4. *Пусть M – паракомпактное вещественное многообразие размерности $2n$. Если на M существует глобальный замкнутый n-корепер $\xi_1, \dots, \xi_n : d\xi_k = 0$ для всех $k \leqslant n$, то на M существуют эрмитова и пара-эрмитова структуры.*

Доказательство. Рассмотрим на M глобальную кососимметричную n-форму $\Omega = \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n$. Легко видеть, что $d\Omega = 0$, и $\operatorname{rad}\Omega = \bigcap_{k=1}^{n} \ker \xi_k$. из предложения 4.1 получаем, что вещественная n-форма Ω определяет на M пара-эрмитову структуру.

Из замечания 2.3 следует, что на паракомпактном многообразии M всегда существует риманова метрика. Продолжим 1-формы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ на $T_{\mathbb{C}}M$, считая, что для любого $X \in C^\infty(TM)$ и для любого комплексного числа λ $\xi_k(\lambda X) = \lambda \xi_k(X), k = 1, 2, \ldots, n$. Легко видеть, что $\xi_1, \ldots, \xi_n$ есть комплексифицированные замкнутые 1-формы на M. Тогда продолжение n-формы Ω на $T_{\mathbb{C}}M$ есть комплексифицированная замкнутая n-форма с радикалом ранга n, которая по предложению 4.1 определяет на M эрмитову структуру.

Поскольку на любой вещественной группе Ли размерности $2n$ с первым числом Бетти $\geqslant n$ всегда существует левоинвариантный замкнутый n-корепер, получаем:

Следствие 4.5. *Пусть G – вещественная группа Ли размерности $2n$, $b_1(G)$ – первое число Бетти группы Ли G, и $b_1(G) \geqslant n$. Тогда на группе Ли G существует левоинвариантная эрмитова структура и левоинвариантная пара-эрмитова структура.*

Пример 4.6. Пусть G – вещественная группа Ли Размерности $2n$, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ – первый производны идеал в $\mathfrak{g}$, и $\dim(\mathfrak{g}') = n$. Выберем в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ дополнение $\mathfrak{p}$ к $\mathfrak{g}'$. Используя равенство (1) из § 3 для левоинвариантных 1-форм получаем, что для любой левоинвариантной 1-формы $\alpha \in \mathfrak{p}^*$ $d\alpha = 0$. Тогда в $\mathfrak{p}^*$ существует левоинвариантный замкнутый корепер $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Из предложения 4.4 получаем, что левоинвариантная кососимметричная n-форма $\Omega = \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n$ определяет на G левоинвариантную пара-эрмитову структуру, а ее продолжение на $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ определяет на G левоинвариантную эрмитову структуру.

Пусть Ad_g – присоединенное представление элемента $g \in G$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Из предложения 3.3 следует, что распределение $\operatorname{rad}\Omega$ инволютивно. Поскольку оператор Ad_g есть изоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ относительно скобки Ли, для любого $g \in G$ $Ad_g(\operatorname{rad}\Omega)$ есть левоинвариантное инволютивное распределение на G ранга n. Поскольку n-форма Ω порождает левоинвариантную пара-эрмитову структуру на группе G, а ее комплексификация порождает эрмитову структуру на G для распределения $\operatorname{rad}\Omega$ существует инволютивное дополнение D в $\mathfrak{g}$ или в $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. Тогда $Ad_g(D)$ есть левоинвариантное инволютивное распределение на G ранга n, дополнительное к $Ad_g(\operatorname{rad}\Omega)$, и мы получаем левоинвариантную пара-эрмитову или эрмитову структуру, порожденную элементом $g \in G$. Пусть H – подгруппа в G, такая что для любого $h \in H$ $Ad_h(\operatorname{rad}\Omega) = \operatorname{rad}\Omega$. Получаем, что однородное пространство G/H параметризует семейство левоинвариантных пара-эрмитовых или эрмитовых структур Полученное как орбита присоединенного действия группы G на радикал n-формы Ω, или как комплексификация присоединенного действия группы G на радикал комплексификации n-формы Ω.

Обобщая пример 4.6 для произвольной группы Ли, получаем:

Предложение 4.7. *Пусть G – вещественная группа Ли размерности $2n$. Любая замкнутая левоинвариантная кососимметричная n-форма Ω на G с радикалом ранга n порождает на G семейство левоинвариантных пара-эрмитовых структур, параметризованное точками орбиты присоединенного действия группы G на радикал n-формы Ω, а комплексификация n-формы Ω порождает на группе G семейство левоинвариантных эрмитовых структур, параметризованное точками орбиты комплексифицированного присоединенного действия группы G на радикал комплексификации n-формы Ω.*

Пусть $\Lambda^n(M)$ – расслоение кососимметричных n-форм над многообразием M, а $\Lambda^n_{\mathbb{C}}(M)$ – расслоение комплексных кососимметричных n-форм над многообразием M. Из теоремы 4.2 следует, что каждая пара-эрмитова структура на многообразии M порождает глобальное сечение расслоения $\Lambda^n(M)$ всюду отличное от 0, а каждая эрмитова структура на M порождает глобальное сечение расслоения $\Lambda^n_{\mathbb{C}}(M)$ всюду отличное от 0. Пусть $e(E)$ – класс Эйлера векторного расслоения E. Если векторное расслоение E допускает глобальное сечение всюду отличное от 0, то $e(E) = 0$ (см. [10]). Таким образом получаем необходимое условие существования на многообразии эрмитовой или пара-эрмитовой структуры:

Предложение 4.8. *Пусть M – вещественное паракомпактное многообразие размерности $2n$. Если M допускает почти пара-эрмитову структуру, то $e(\Lambda^n(M)) = 0$; если M допускает почти эрмитову структуру, то $e(\Lambda^n_{\mathbb{C}}(M)) = 0$.*

Пусть M – компактное многообразие без края, и $\chi(M)$ – эйлерова характеристика многообразия M. Так как $\chi(M) = \int_M e(M)$, где $e(M)$ – класс Эйлера касательного расслоения TM (см. [10]), получаем:

Следствие 4.9. *Пусть M – вещественное паракомпактное многообразие размерности $2n$, и расслоения $\Lambda^n(M)$ и $\Lambda^n_{\mathbb{C}}(M)$ являются компактными многообразиями без края. Если $\chi(\Lambda^n(M)) > 0$, то на M не существует почти пара-эрмитовых структур; если $\chi(\Lambda^n_{\mathbb{C}}(M)) > 0$, то на M не существует почти эрмитовых структур.*

Предложение 4.10. *Если вещественное паракомпактное многообразие M допускает почти пара-эрмитову структуру с распределениями собственных подпространств D_+ и D_-, то многообразие M и векторные расслоения D_+, D_- ориентируемы.*

Доказательство. Поскольку многообразие M допускает почти пара-эрмитову структуру, оно необходимо имеет размерность $2n$. Пара распределений касательных подпространств D_+, D_- ранга n определяют на M почти пара-эрмитову структуру с точностью до умножения на -1, из теоремы 4.2 следует, что на M существуют вещественные кососимметричные n-формы Ω_+, Ω_-, такие что $\operatorname{rad}\Omega_+ = D_-, \operatorname{rad}\Omega_- = D_+$. Поскольку ограничение n-формы на сечения распределения D_+ и ограничение N-формы Ω_- на сечения распределения D_- не вырождены, эти n-формы задают непрерывный выбор ориентации в слоях расслоений D_+ и D_- соответственно, а кососимметричная вещественная $2n$-форма

$\mu = \Omega_+ \wedge \Omega_-$ есть форма объема на M. Поскольку на паракомпактном многообразии всегда существует риманова метрика, расслоение D_+ допускает связность Леви-Чивитта $Q : T(D_+) = Q \oplus D_+$. Поднятие $2n$-формы μ на сечения связности Q и непрерывный выбор ориентации Ω_+ в слоях расслоения D_+ порождают форму объема на пространстве расслоения D_+, то есть D_+ есть ориентируемое векторное расслоение. Аналогично получаем, что D_- также есть ориентируемое векторное расслоение.

Теперь покажем, как с помощью вырожденных кососимметричных n-форм можно получать семейства эрмитовых и пара-эрмитовых структур. Пусть Ω – вещественная или комплексная регулярная кососимметричная n-форма с радикалом ранга n на вещественном многообразии M размерности $2n$. Обозначим через A группу всех гладких автоморфизмов многообразия M. Действие этой группы на n-форму Ω определяется стандартным образом:

$$a(\Omega) = a^*\Omega = \Omega \circ da, \;\; a \in \mathrm{A},$$

где da есть дифференциал отображения a. Обозначим через A_Ω подмножество

$$\mathrm{A}_\Omega = \{a \in \mathrm{A} : da(\operatorname{rad}\Omega_x) = \operatorname{rad}\Omega_{a(x)}, \forall x \in M\}.$$

Легко проверить, что A_Ω есть подгруппа в A. Если $d\Omega = 0$, то из равенства (1) в § 3 и свойств дифференциала отображения следует, что $d(a^*\Omega) = 0$ для любого $a \in \mathrm{A}$. Из предложения 4.1 следует, что для любого $a \in \mathrm{A}/\mathrm{A}_\Omega$ $a^*\Omega$ порождает эрмитову или пара-эрмитову структуру на M. Таким образом получаем:

Предложение 4.11. *Пусть M – вещественное паракомпактное многообразие размерности $2n$. Если на M существует комплексная (вещественная) замкнутая кососимметричная регулярная n-форма с радикалом ранга n, то M допускает семейство эрмитовых (пара-эрмитовых) структур, параметризованное элементами орбиты действия группы гладких автоморфизмов многообразия M на распределение* $\operatorname{rad}\Omega$.

Пусть M – вещественное паракомпактное многообразие размерности $2n$. в [11] описана связь между комплексными структурами на M и структурами Дирака в расслоении $T_{\mathbb{C}}M \oplus T^*_{\mathbb{C}}M$. а в [12] описана связь между паракомплексными структурами на M и структурами Дирака в расслоении $TM \oplus T^*M$. Любая замкнутая кососимметричная 2-форма B на M порождает преобразование B-поля на M, которое отображает структуру Дирака в другую структуру Дирака , а следовательно порождает комплексную или паракомплексную структуру на M (см. [11,12]). Теперь из предложения 4.1 и теоремы 4.2 получаем:

Предложение 4.12. *Пусть M – вещественное паракомпактное многообразие размерности $2n$. Если на M существует комплексная (вещественная) регулярная замкнутая кососимметричная n-форма с радикалом ранга n, то M допускает семейство эрмитовых (пара-эрмитовых) структур, параметризованное элементами множества всех комплексных (вещественных) замкнутых кососимметричных 2-форм на M.*

Замечание 4.13. Семейства эрмитовых (пара-эрмитовых) структур из предложений 4.11 и 4.12 могут не совпадать, но всегда имеют непустое пересечение.

§ 5. Эрмитовы и пара-эрмитовы структуры на шестимерной сфере

Рассмотрим шестимерную сферу S^6 в семимерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^7$. $\mathbb{R}^7$ можно отождествить с пространством мнимых октонионов. Для любых $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^7$ определена кососимметричная билинейная операция

$$b(q_1, q_2) = \mathrm{Im}(q_1 \bar{q}_2),$$

где $\mathrm{Im}(q)$ – мнимая часть октониона q, $\bar{q}$ обозначает сопряжение октониона q. Поскольку в $\mathbb{R}^7$ существует стандартная евклидова метрика, и ограничение этой метрики на S^6 есть риманова метрика на S^6, любая почти комплексная структура на S^6 порождает почти эрмитову структуру на S^6 (см. § 2). Аналогично, так как шестимерная сфера есть компактное многообразие, в силу замечания 2.3 любая почти паракомплексная структура на S^6 порождает почти пара-эрмитову структуру на S^6. Пусть G_2 – группа ортогональных симметрий кососимметричной формы b, а $\mathrm{SU}(3)$ – группа комплексных эрмитовых матриц с определителем 1. Сферу S^6 можно рассматривать как однородное пространство $G_2/\mathrm{SU}(3)$. Почти комплексная (паракомплексная) структура J на S^6 называется G_2-инвариантной, если для любого $g \in G_2$ $J \circ dg = dg \circ J$, где dg – дифференциал отображения g. Известно, что S^6 допускает неинтегрируемую почти комплексную G_2-инвариантную почти комплексную структуру J_0 (см. [6]). Распределения V_+ и V_- из § 2 для J_0 есть G_2-инвариантные распределения комплексного ранга 3, и

$$\begin{aligned} V_+ &= \{X - iJ_0X : X \in C^\infty(T(S^6))\}, \\ V_- &= \{Y + iJ_0Y : Y \in C^\infty(T(S^6))\}. \end{aligned}.$$

Пусть $(\Omega_0$ – фундаментальная 2-форма почти эрмитовой структуры (J_0, h_0), где h_0 – почти эрмитова метрика на S^6. Поскольку шестимерная сфера не допускает симплектических структур, и Ω_0 есть невырожденная 2-форма типа (1,1), $d\Omega_0$ есть регулярная кососимметричная 3-форма на S^6 с нулевым радикалом. На шестимерной сфере любое вещественное векторное поле обращается в 0 хотя бы в одной точке, так как эйлерова характеристика шестимерной сферы равна 2.

Предложение 5.1. *На четномерной сфере S^{2n} существует сечение расслоения $T_{\mathbb{C}}(S^{2n})$, отличное от 0 во всех точках сферы.*

Доказательство. Пусть p и q – два полюса сферы S^{2n}, $U = S^{2n} \setminus p$, $V = S^{2n} \setminus q$. Стереографическая проекция с центром в точке q есть диффеоморфизм $\phi : U \to \mathbb{R}^{2n}$, а стереографическая проекция с центром в точке p есть диффеоморфизм $\psi : V \to \mathbb{R}^{2n}$. Рассмотрим на $\mathbb{R}^{2n}$ векторное поле $S(x) = (s_1(x), \dots, S_{2n}(x))$, где $s_k(x) = \exp(-k|x|^2)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{2n}^2}$, $k = 1, 2, \dots, 2n$. Векторное поле S позволяет определить на S^{2n} векторные поля $X, Y \in C^\infty(T(S^{2n}))$, такие что $X(x) = (d\phi)^{-1}S(\phi(x))$ при $x \in U$, $X(p) = 0$, $Y(x) = (d\psi)^{-1}S(\psi(x))$ при $x \in V$, $Y(q) = 0$. Заметим, что векторное поле X непрерывно в точке p, векторное поле Y непрерывно в точке q, и $X\big|_U \neq 0$, $Y\big|_V \neq 0$. В любой точке $x \in S^{2n}$ комплексное сечение $Z = X + iY$, $i = \sqrt{-1}$ расслоения $T_{\mathbb{C}}(S^{2n})$ есть глобальное сечение на S^{2n}, всюду отличное от 0.

Продолжим эрмитову метрику h_0 до эрмитова скалярного произведения на сечениях расслоения $T_{\mathbb{C}}(S^6)$. Поскольку это скалярное произведение задает изоморфизм между сечениями расслоения $T_{\mathbb{C}}(S^6)$ и комплексными 1-формами, на S^6 существует комплексная 1-форма $\eta = \mathrm{I}_Z\, h_0$, всюду отличная от 0, где Z – комплексное сечение из предложения 5.1. Из доказательства предложения 5.1 следует, что комплексное сечение $Z = X + iY$ не может быть сечением типа (1,0) или типа (0,1), поскольку $Y \neq J_0X$. Получаем, что Z и J_0Z есть комплексные линейно независимые в каждой точке сечения расслоения $T_{\mathbb{C}}(S^6)$ на S^6. Положим

$$\Omega_1 = \eta, \omega_2 = \mathrm{I}_{J_0Z}\, h_0, \omega_3 = \mathrm{I}_Z(\mathrm{I}_{J_0Z}\, d\Omega_0).$$

Из построения 1-формы ω_3 следует, что $Z, J_0Z \in \ker\omega_3$, а значит комплексные 1-формы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ линейно независимы в каждой точке из S^6, и $\Omega = \omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3$ есть регулярная кососимметричная комплексная 3-форма на S^6, такая что

$$\mathrm{rad}\,\Omega = \ker\omega_1 \cap \ker\omega_2 \cap \ker\omega_3$$

имеет ранг 3. Получаем:

Предложение 5.2. *На шестимерной сфере S^6 существует семейство комплексных кососимметричных регулярных 3-форм с радикалом ранга 3, параметризованное элементами множества комплексных 1-форм на S^6, всюду отличных от 0.*

Из предложения 4.1 и предложения 5.2 получаем:

Следствие 5.3. *Шестимерная сфера S^6 допускает семейство почти эрмитовых структур, параметризованное комплексными 1-формами на S^6, всюду отличными от 0.*

Используя описанный выше способ построения кососимметричной регулярной комплексной 3-формы с радикалом ранга 3 по комплексной 1-форме на S^6 и следствие 5.3, мы можем построить функционал $\mathrm{kor} : \omega \mapsto \|d\theta_\omega\|$, где $\|d\theta_\omega\|$ – норма дифференциала кососимметричной 3-формы θ_ω, построенная по 1-форме ω, всюду отличной от 0 на S^6. Из предложения 4.1 и теоремы 4.2 следует, что соответствующая 3-форме θ_ω почти эрмитова структура интегрируема тогда и только тогда, когда ω есть ноль функционала kor. Теперь получаем:

Теорема 5.4. *Пусть ω – комплексная 1-форма на шестимерной сфере S^6, всюду отличная от 0, θ_ω – кососимметричная регулярная комплексная 3-форма на S^6, построенная по этой форме, и (J_ω, h) – соответствующая 1-форме ω почти эрмитова структура на S^6. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) Почти комплексная структура J_ω интегрируема;
2) 3-форма θ_ω замкнута;
3) ω есть ноль функционала kor.

Из этой теоремы видно, что для получения на шестимерной сфере S^6 эрмитовой структуры достаточно построить на S^6 замкнутую комплексную регулярную кососимметричную 3-форму с радикалом ранга 3. Как было показано выше, любая комплексная 1-форма ω на S^6, всюду отличная от 0, порождает кососимметричную комплексную 3-форму с радикалом ранга 3:

$$\theta_\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3,\ \omega_1 = \omega.$$

Условие $d\theta_\omega = 0$ дает, что эта 3-форма порождает эрмитову структуру на S^6. Конкретных примеров такой замкнутой 3-формы на S^6 на данный момент неизвестно. Здесь мы можем только привести достаточные условия, при выполнении которых на S^6 существует такая 3-форма.

Предложение 5.5. *Если на шестимерной сфере S^6 выполнено одно из условий:*

1) *На S^6 существует глобальный комплексный замкнутый 3-корепер;*
2) *на S^6 существуют комплексные гладкие функции f_1, f_2, f_3, такие что их дифференциалы линейно независимы в каждой точке из S^6;*
3) *На S^6 существует глобальный комплексный 3-корепер $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, такой что $d\omega_k \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = 0$, $k = 1, 2, 3$,*

то на S^6 существует эрмитова структура.

Замечание 5.6. Из предложения 4.11 следует, что если на шестимерной сфере S^6 существует комплексная регулярная кососимметричная замкнутая 3-форма с радикалом ранга 3, то она порождает семейство эрмитовых структур на S^6, параметризованное элементами орбиты действия группы гладких автоморфизмов S^6 на радикал этой 3-формы.

Для вещественных кососимметричных 3-форм на S^6 получаем следующий результат:

Теорема 5.7. *На шестимерной сфере не существует вещественных кососимметричных регулярных 3-форм с радикалом ранга 3.*

Доказательство. Предположим, что на S^6 существует кососимметричная регулярная вещественная 3-форма Ω с радикалом ранга 3. Пусть $D_+ = \operatorname{rad}\Omega$, а D_- есть ортогональное дополнение к распределению касательных подпространств D_+ относительно римановой метрики на S^6. Так как S^6 есть компактное ориентируемое многообразие, из предложения 4.10 следует, что расслоения касательных подпространств D_+ и D_- ориентируемы. Пусть $e(E)$ – класс Эйлера векторного расслоения E. Поскольку класс Эйлера любого векторного расслоения нечетного ранга равен 0, имеем:

$$e(S^6) = e(D_+) \smile e(D_-) = 0.$$

Но $e(S^6) \neq 0$, поскольку эйлерова характеристика шестимерной сферы равна 2. Следовательно, на S^6 не существует вещественных регулярных кососимметричных 3-форм с радикалом ранга 3.

Из теорем 4.2 и 5.7 получаем:

Следствие 5.8. *На шестимерной сфере не существует почти паракомплексных структур.*

§ 6. Эрмитовы и пара-эрмитовы структуры на шестимерных многообразиях

Здесь мы изучим вопрос существования на некоторых шестимерных многообразиях эрмитовых и пара-эрмитовых структур, а также получим семейства эрмитовых и пара-эрмитовых структур на этих многообразиях. Заметим, что в [6] описаны почти комплексные структуры на шестимерных произведениях сфер с помощью умножения октанионов и доказано, что все такие почти комплексные структуры не интегрируемы. Здесь мы не будем использовать умножение октонионов и получим эрмитовы структуры с помощью метода из § 4.

Пусть S^n – вещественная сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. При любом $n \geqslant 1$ S^n есть компактное односвязное многообразие. Компактное многообразие $S^3 \times S^3$ можно вложить в комплексное пространство $\mathbb{C}^4$, поэтому на $S^3 \times S^3$ существует эрмитова структура, индуцированная из $\mathbb{C}^4$. Также, поскольку $T(S^3 \times S^3) = T(S^3) \oplus T(S^3)$, это разложение задает на $S^3 \times S^3$ пара-эрмитову структуру (см. § 2). Из предложений 4.11 и 4.12 получаем:

Следствие 6.1. *Прямое произведение трехмерных сфер $S^3 \times S^3$ допускает семейство эрмитовых (пара-эрмитовых) структур, параметризованное элементами орбиты действия группы гладких автоморфизмов многообразия $S^3 \times S^3$ на радикал Комплексной (вещественной) регулярной замкнутой кососимметричной 3-форму на $S^3 \times S^3$ с радикалом ранга 3. Кроме того, любая комплексная (вещественная) замкнутая кососимметричная 2-форма на $S^3 \times S^3$ порождает эрмитову (пара-эрмитову) структуру на $S^3 \times S^3$.*

Теперь мы докажем, что $S^2 \times S^4$ допускает семейство эрмитовых структур, но не допускает почти пара-эрмитовых структур.

Теорема 6.2. *На многообразии $S^2 \times S^4$ существует семейство эрмитовых структур, параметризованное множеством всех комплексных замкнутых кососимметричных 2-форм на $S^4 \times S^2$.*

Доказательство. Из предложения 5.1 следует, что на S^4 существует комплексное сечение Z расслоения $T_{\mathbb{C}}(S^4)$, всюду отличное от 0. Комплексное сечение Z порождает на S^4 комплексное распределение ранга 1, так как $Z \neq 0$ на S^4. Распределение $T_{\mathbb{C}}(S^2) \oplus \mathbb{C}\, Z$ есть инволютивное распределение ранга 3 в $T_{\mathbb{C}}(S^2 \times S^4))$. Это распределение и его ортогональное дополнение относительно фиксированной римановой метрики позволяют построить на $S^2 \times S^4$ комплексную структуру как в § 2. Теперь из теоремы 4.2 и предложения 4.12 получаем, что на $S^2 \times S^4$ существует семейство эрмитовых структур, параметризованное элементами пространства $\bigwedge^2 T^*_{\mathbb{C}}(S^2 \times S^4)$.

Теорема 6.3. *На прямом произведении двумерной сферы S^2 и четырехмерной сферы S^4 не существует почти пара-эрмитовых структур.*

Доказательство. Предположим, что на $S^2 \times S^4$ существует почти пара-эрмитова структура. По теореме 4.2 эта почти парра-эрмитова структура порождает вещественную регулярную кососимметричную 3-форму на $S^2 \times S^4$ с радикалом ранга 3. Также как в доказательстве теоремы 5.7 получаем, что эйлерова характеристика прямого произведения $S^2 \times S^4$ равна 0. Но эйлерова характеристика этого прямого произведения сфер равна 4. Следовательно, на $S^2 \times S^4$ не существует почти пара-эрмитовых структур.

Поскольку на любом компактном многообразии с положительной эйлеровой характеристикой любое векторное поле обращается в 0 в некоторой точке (см. [10]), обобщая теорему 6.3, получаем:

Теорема 6.4. *Пусть M – вещественное компактное ориентируемое шестимерное многообразие без края с положительной эйлеровой характеристикой. Тогда на M не существует почти пара-эрмитовых структур.*

Поскольку произведение сфер $S^5 \times S^1$ можно вложить в комплексное пространство $\mathbb{C}^4$ Это многообразие допускает эрмитову структуру. По теореме 4.2 эта эрмитова структура порождает регулярную комплексную замкнутую кососимметричную 3-форму на $S^5 \times S^1$ с радикалом ранга 3. Из предложения 4.11 и предложения 4.12 получаем:

Следствие 6.5. *Прямое произведение пятимерной сферы S^5 и окружности S^1 допускает семейство эрмитовых структур, параметризованное элементами орбиты действия группы гладких автоморфизмов многообразия $S^5 \times S^1$ на радикал Комплексной замкнутой регулярной кососимметричной 3-форму на $S^5 \times S^1$ с радикалом ранга 3. Кроме того, любая комплексная замкнутая кососимметричная 2-форма на $S^5 \times S^1$ порождает эрмитову структуру на $S^5 \times S^1$.*

Теорема 6.6. *Прямое произведение пятимерной сферы S^5 и окружности S^1 допускает семейство пара-эрмитовых структур, параметризованное элементами орбиты действия группы гладких автоморфизмов многообразия $S^5 \times S^1$ на радикал вещественной замкнутой регулярной кососимметричной 3-форму на $S^5 \times S^1$ с радикалом ранга 3. Кроме того, любая вещественная замкнутая кососимметричная 2-форма на $S^5 \times S^1$ порождает пара-эрмитову структуру на $S^5 \times S^1$.*

Доказательство. Будем рассматривать сферу S^5 как поверхность в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$:

$$S^5 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1\}.$$

Пусть $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ – трехмерный тор вложенный в $\mathbb{C}^3$. Определим действие тора T^3 на точку $z \in S^5$ следующим образом:

$$a(z) = (a_1, z_1, a_2 z_2, a_3, z_3), z = (z_1, z_2, z_3) \in S^5,$$
$$a = (a_1, a_2, a_3) \in S^1 \times S^1 \times S^1.$$

Таким образом, через каждую точку $z \in S^5$ проходит вещественное трехмерное подмногообразие $T^3(z)$. Введем на S^5 распределение касательных подпространств $D : D(z) = T_z(T^3(z))$ для любого $z \in S^5$. Так как S^5 – компактное многообразие, для любой точки $z \in S^5$ существует открытая окрестность $U : D|_U = T(T^3(z))|_U$. По теореме Фробениуса получаем, что D есть регулярное инволютивное распределение ранга 3. Из теоремы 4.2 следует, что на $S^5 \times S^1$ существует вещественная замкнутая регулярная кососимметричная 3-форма с радикалом D. Теперь утверждение теоремы следует из предложений 4.11 и 4.12.

Пусть M – вещественное многообразие размерности 4, и $\Lambda^2(M)$ – расслоение вещественных кососимметричных 2-форм над M. $\Lambda^2(M)$ есть вещественное паракомпактное многообразие размерности 6. Пусть $\star$ – оператор Ходжа на множестве кососимметричных полилинейных форм на M. Из свойст оператора Ходжа следует, что если $\Omega \in \Lambda^2(M)$, то $\star\Omega \in \Lambda^2(M)$, $\star^2 = \mathrm{id}$, и оператор $\star$ имеет в точности два собственных значения ± 1. Тогда касательное расслоение $T(\Lambda^2(M))$ есть сумма Уитни двух распределений касательных подпространств ранга 3 $T(\Lambda^2_+(M))$ и $T(\Lambda^2_-(M))$, где

$$\Lambda^2_+(M) = \{\Omega \in \Lambda^2(M) : \star\Omega = \Omega\},$$
$$\Lambda^2_-(M) = \{\Omega \in \Lambda^2(M) : \star\Omega = -\Omega\}.$$

Распределения $T(\Lambda^2_+(M))$ и $T(\Lambda^2_-(M))$ инволютивны, поскольку являются касательными расслоениями для интегральных подмногообразий $\Lambda^2_+(M)$ и $\Lambda^2(M)$. Как показано в § 2, эта пара распределений определяет на $\Lambda^2(M)$ пара-эрмитову структуру, а пара комплексифицированных распределений $T(\Lambda^2_+(M))\otimes\mathbb{C}, T(\Lambda^2_-(M))\otimes\mathbb{C}$ определяет на $\Lambda^2(M)$ эрмитову структуру. Применяя теорему 4.2, предложение 4.11 и предложение 4.12, получаем:

Предложение 6.7. *Расслоение $\Lambda^2(M)$ вещественных кососимметричных 2-форм над четырехмерным вещественным многообразием M допускает семейство эрмитовых (пара-эрмитовых) структур, параметризованное элементами орбиты действия группы гладких автоморфизмов многообразия $\Lambda^2(M)$ на радикал Комплексной (вещественной) замкнутой регулярной кососимметричной 3-форму на $\lambda^2(M)$ с радикалом ранга 3. Кроме того, любая комплексная (вещественная) замкнутая кососимметричная 2-форма на $\Lambda^2(M)$ порождает эрмитову (пара-эрмитову) структуру на $\Lambda^2(M)$.*

Замечание 6.8. Пусть M – вещественное многообразие размерности 4, и $\Lambda^2_{\mathbb{C}}(M)$ – расслоение комплексных кососимметричных 2-форм над многообразием M. Из предложения 4.8 и предложения 6.7 следует, что векторные расслоения $\Lambda^2(M)$ и $\Lambda^2_{\mathbb{C}}(M)$ допускают глобальное сечение, всюду отличное от 0, а их класс Эйлера равен 0.

Заметим, что вместо расслоения всех кососимметричных 2-форм над четырехмерным многообразием M можно рассматривать подрасслоение только фундаментальных 2-форм для эрмитовых или пара-эрмитовых структур в слоях касательного расслоения TM с фиксированной метрикой, в частности, для твисторного расслоения.

Список литературы

[1] Cruceanu V., Fortuny P., Gadea P. M., “A Survey on Paracomplex Geometry”, *Rocky Mountain J. Math.*, **26**:1 (1996), 83–115.

[2] Алексеевский Д. В., Медори К., Томассини А., “Однородные пара-кэлеровы многообразия Эйнштейна”, *Успехи математических наук*, **64**:1 (2009), 3–50.

[3] Корнев Е. С., “Аффинорные структуры на векторных расслоениях”, *Сиб. матем. журн.*, **55**:6 (2014), 1283–1296.

[4] Корнев Е. С., “Субкомплексные и субкэлеровы структуры”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:5 (2016), 1062–1077.

[5] Hitchin N. J., “The geometry of three-forms in six dimensions”, *J. Diff. Geom.*, **55** (2000), 547–576.

[6] Даурцева Н. А., Смоленцев Н. К., “О почти комплексных структурах на шестимерных произведениях сфер”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил.*, **146** (2018), 17–47.

[7] Смоленцев Н. К., “О почти (пара) комплексных структурах Кэли на сферах $S^{2,4}$ и $S^{3,3}$”, *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.*, **53** (2018), 22–38.

[8] Кобаяси Ш., Номидзу К., *Основы дифференциальной геометрии (В 2 т.)*, Наука, Москва, 1981.

[9] Бессе А., *Многообразия Эйнштейна (В 2 т.)*, Мир, Москва, 1990.

[10] Милнор Дж., Сташеф Дж., *Характеристические классы*, Мир, Москва, 1979.

[11] Gualtieri M., “Generalized Complex Geometry”, *Ann. of Math.*, **174**:1 (2011), 75–123.

[12] Svoboda D., “Algebroid Structures on Para-Hermitian Manifolds”, *J. Math. Phys.*, **59**:12 (2018), 122–302.

Е. С. Корнев (E. S. Kornev)
Кемеровский государственный университет
E-mail: q148@mail.ru