Нормальные субтвисторные структуры

Корнев Е. С.

УДК 514.765

Аннотация.

Данная работа посвящена специальному классу субтвисторных структур - нормальным субтвисторным структурам, которые являются обобщениями твисторных структур на многообразия произвольной размерности. Показано, когда субтвисторная структура является нормальной, как с помощью нормальных субтвисторных структур можно получать эрмитовы и кэлеровы подмногообразия в вещественных многообразиях произволной размерности, и как описывается геометрия вещественного многообразия, допускающего нормальную субтвисторную структуру. Отдельно изучен случай левоинвариантных субтвисторных структур на группах Ли и показано, как с их помощью можно получать подгруппы Ли с левоинвариантной эрмитовой или кэлеровой структурой. Доказано, что вещественное многообразие с нормальной субтвисторной структурой локально изометрично прямому произведению кэлерова (эрмитова) подмногообразия и риманова подмногообразия.

Ключевые слова: субтвисторная структура, субкэлерова структура, кэлерово подмногообразие, радикал внешней 2-формы, вырожденная 2-форма.

1. Введение

В теории симплектических и комплексных многообразий обычно используются невырожденные кососимметричные 2-формы, а в теории контактных многообразий 1-форма с максимально неголономным ядром. В первом случае размерность многообразия должна быть только четной, а во втором только не четной. В [1] было введено понятие субкомплексной и субкэлеровой структуры, которые обобщают классические комплексные, твисторные и кэлеровы структуры на вещественные многообразия произвольной размерности с вырожденной кососимметричной 2-формой. Для субкомплексной и субкэлеровой структуры четность размерности многообразия не играет роли. Также в [1] было дано обобщение класической твисторной структуры на многообразия произвольной размерности с вырожденной кососимметричной 2-формой. Такое обобщение называется субтвисторной структурой. В общем случае субтвисторная структура это следующий набор объектов: (Ω, D, Φ, g), где Ω – вырожденная или нет регулярная кососимметричная 2-форма на многообразии M любой размерности, называемая фундаментальной 2-формой, D – рабочее расслоение касательных подпространств, ограничение на которое 2-формы Ω невырождено, Φ – непрерывное поле эндоморфизмов касательных пространств, называемое аффинором, связывающее кососимметричную 2-форму Ω и риманову метрику g на M. Если для субтвисторной структуры $d\Omega = 0$ и существует подмногообразие $Q : \Phi|_Q$ есть комплексная структура на Q, сохраняющая 2-форму Ω, субтвисторная структура вместе с подмногообразием Q называется субкэлеровой структурой. Очевидно, что подмногообразие Q для субкэлеровой структуры есть кэлерово подмногообразие в M, а ограничение римановой метрики g и аффинора Φ на Q есть эрмитова структура на Q. Ключевым вопросом для субтвисторных структур является вопрос о том, когда субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой индуцирует субкэлерову структуру. В [2] было введено понятие тензора кручения субтвисторной структуры и показано, что субтвисторная структура с замкнутой 2-формой Ω и нулевым тензором кручения всегда индуцирует субтвисторную структуру. Также в [2] был построен класс многообразий, на которых всегда существует субкэлерова структура. Этот класс состоит из главных расслоений над кэлеровыми многообразиями. Целью данной работы является ввести и изучить кардинально другой класс субтвисторных структур, которые индуцируют субкэлерову структуру. Мы называем такие структуры нормальными субтвисторными структурами. Для нормальных субтвисторных структур не требуется, чтобы фундаментальная 2-форма была замкнута, однако налагается условие на аффинор, которое влечет обращение в 0 тензора кручения субтвисторной структуры. Отсюда следует, что нормальная субтвисторная структура, ограниченная на некоторое подмногообразие Q индуцирует на Q эрмитову структуру, или, в случае замкнутой фундаментальной 2-формы, кэлерову структуру. Таким образом, нормальные субтвисторные структуры дают способ получения в вещественных многообразиях любой размерности эрмитовых или кэлеровых подмногообразий.

в [4] описана теория контактных структур на многообразий нечетной размерности. В [3] контактные метрические структуры были обобщены на многообразия и алгеброиды Ли любой размерности, а именно были введены так называемые аффинорные метрические структуры. В аффинорной метрической структуре вместо вырожденной кососимметричной 2-формы используется незамкнутая 1-форма с вырожденным внешним дифференциалом. Любая аффинорная метрическая структура порождает субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой в силу свойства $d^2 = 0$, где d – оператор внешнего дифференцирования дифференциальных форм. В данной работе мы покажем, как понятие аффинорной метрической структуры позволяет ввести обобщение структуры Сасаки (см. [4]) на многообразия любой размерности вне зависимости от четности. Здесь мы получим важный геометрический результат, состоящий в том, что если вещественное многообразие размерности ≥ 3 допускает нормальную субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой, то оно локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия и риманова подмногообразия. Кроме того, для групп Ли левоинвариантные субтвисторные нормальные структуры хорошо описывают геометрическую структуру группы Ли, что также изложено в данной работе. Особенно примечательным фактом для групп Ли является факт, что любая биинвариантная субтвисторная структура на группе Ли является нормальной, когда ее фундаментальная 2-форма не является точной.

Структура данной работы следующая: в § 2 приведены основные понятия и сведения из теории субтвисторных структур в соответствии с работой [1]. В § 3 изложены необходимые результаты для тензора кручения субтвисторной структуры. В § 4 определяется понятие нормальной субтвисторной структуры и доказывается, что любая нормальная субтвисторная структура имеет нулевой тензор кручения. Также в § 4 получены некоторые важные геометрические следствия этого свойства. В § 5 изучаются левоинвариантные и биинвариантные нормальные субтвисторные структуры на группах Ли, а также получена связь этих структур с геометрической структурой групп Ли. В § 6 вводится понятие обобщенной структуры Сасаки для многообразий любой размерности и приведены примеры таких структур.

2. Субтвисторные структуры

Здесь мы приведём необходимые сведения о субтвисторных структурах, следуя [1], а также опишем их частный случай - субкэлеровы структуры.

Пусть M – вещественное многообразие размерности ≥ 3, и Ω – билинейная форма на M. Внутренним произведением билинейной формы Ω и векторного поля X называется 1-форма $I_X\,\Omega$, такая что для любого векторного поля Y на M $I_X\,\Omega(Y) = \Omega(X, Y)$.

Определение 2.1. Радикалом билинейной формы Ω в точке $x \in M$ называется касательное подпространство

$$\operatorname{rad}\Omega_x = \{v \in T_xM : \underset{v}{I}\,\Omega_x = 0\}.$$

Радикалом билинейной формы Ω на многообразии M называется распределение касательных подпространств

$$\operatorname{rad}\Omega = \bigcup_{x\in M} \operatorname{rad}\Omega_x.$$

Билинейная форма Ω называется регулярной, если ранг распределения $\operatorname{rad}\Omega$ есть константа во всех точках из M.

Сразу из определения следует, что регулярная билинейная форма Ω невырождена тогда и только тогда, когда $\operatorname{rad}\Omega = \{0\}$, а радикал нулевой билинейной формы есть все касательное расслоение TM. В [1] для радикала кососимметричной регулярной 2-формы доказан следующий результат:

Теорема 2.2. *Пусть M – вещественное многообразие размерности $n \geq 3$, и Ω – регулярная ненулевая кососимметричная 2-форма с радикалом ранга r на M. Тогда:*

1) *Если n четно, то и r четно, и $0 \leq r \leq n-2$;*

2) *Если n не четно, то и r не четно, и $1 \leq r \leq n-2$;*

3) *Если $d\Omega = 0$, то $\operatorname{rad}\Omega$ есть инволютивное распределение на M.*

Из пунктов 1 и 2 этой теоремы следует, что для любого дополнительного к $\operatorname{rad}\Omega$ распределения на M его ранг всегда равен $n-r$, то есть всегда четный, вне зависимости от четности числа n. Кроме того, любая ненулевая регулярная 2-форма на многообразии размерности 2 всегда невырождена, то есть имеет нулевой радикал.

Пусть Ω – ненулевая кососимметричная регулярная 2-форма на многообразии M. Рабочим расслоением для Ω называется дополнительное к $\operatorname{rad}\Omega$ распределение касательных подпространств на M. Как было показано выше, рабочее расслоение всегда имеет четный ранг на многообразии любой размерности, а значит слои рабочего расслоения всегда имеют комплексную структуру, симплектическую и кэлерову структуру, как векторные пространства четной размерности. Если многообразие M допускает риманову метрику g, то рабочее расслоение можно однозначно определить как ортогональное относительно метрики g дополнение к распределению $\operatorname{rad}\Omega$.

Определение 2.3. Пусть Ω – регулярная кососимметричная 2-форма на многообразии M с рабочим расслоением D, и g – риманова метрика на M. Аффинором, ассоциированным с 2-формой Ω, называется непрерывное поле Φ эндоморфизмов касательных пространств на M, такое что

$$\Omega(X,Y)=g(\Phi X,Y), X,Y\in C^1(TM),$$
$$g(\Phi X,\Phi Y)=g(X,Y), X,Y\in C^1(D).$$

В [1] получены следующие свойства аффинора:

Предложение 2.4. *Пусть Ω – вырожденная регулярная кососимметричная 2-форма на многообразии M размерности ≥ 3 с рабочим расслоением D, и Φ – ассоциированный с 2-формой Ω аффинор. Тогда:*

1) $\ker\Phi=\operatorname{rad}\Omega$*;*

2) $\Phi^2|_D=-\operatorname{id}$*, где* id *– поле тождественных операторов на* M*;*

3) $\Omega\circ\Phi=\Omega$*;*

4) Для любого $X\in C^1(TM)$ $\Omega(X,\Phi X)\geq 0$.

Отсюда видно, что аффинор, ассоциированный с кососимметричной 2-формой, есть обобщение понятия почти комплексной структуры, ассоциированной с симплектической структурой на четномерных многообразиях. В частности, когда $\operatorname{rad}\Omega=\{0\}$ аффинор есть классическая почти комплексная структура, сохраняющая невырожденную 2-форму Ω. Теперь мы можем определить понятие субтвисторной структуры.

Определение 2.5. Субтвисторной структурой на вещественном многообразии M размерности ≥ 3 называется набор объектов (Ω, D, Φ, g), где Ω – ненулевая регулярная кососимметричная 2-форма на M, D – рабочее расслоение для 2-формы Ω, Φ – аффинор, ассоциированный с 2-формой Ω, g – риманова метрика на M. 2-форма Ω называется фундаментальной 2-формой субтвисторной структуры, а распределение D называется рабочим расслоением субтвисторной структуры.

Замечание 2.6. Если рабочее расслоение субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, g) на многообразии M вполне неголономно, то субтвисторная структура индуцирует на M субриманову структуру (D, g).

Поскольку рабочее расслоение D субтвисторной структуры всегда имеет четный ранг, для любого интегрального подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ ограничение аффинора Φ на Q есть ортогональная почти комплексная структура на Q. Если эта почти комплексная структура интегрируема, то Q есть комплексное подмногообразие в M. Это приводит к следующему определению:

Определение 2.7. Субкэлеровой структурой на вещественном многообразии M размерности ≥ 3 называется субтвисторная структура (Ω, D, Φ, g) : $d\Omega = 0$ вместе с подмногообразием $Q : TQ = d|_Q$, и ограничение аффинора Φ на Q есть комплексная структура.

В [2] показано, что любое главное расслоение над кэлеровым многообразием допускает субкэлерову структуру. Это дает следующий класс примеров многообразий с субкэлеровой структурой:

Теорема 2.8. *Пусть P – главное расслоение над кэлеровым многообразием, и r – размерность слоев этого главного расслоения. Тогда многообразие P допускает субкэлерову структуру с радикалом ранга r.*

В частности, расслоение вещественных ортогональных реперов над комплексным проективным пространством $\mathbb{C}P^n$ имеет вещественную размерность $2n^2+n$. При нечетном n это число нечетно, а значит при нечетном n это многообразие не допускает кэлерову структуру, но допускает субкэлерову структуру с радикалом ранга $2n^2 - n$. В [2] также построена субкэлерова структура на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, которое не допускает кэлерову структуру в силу нечетной размерности.

В [3] введено понятие аффинорной метрической структуры, которое обобщает контактные метрические структуры на многообразия любой размерности. Аффинорная метрическая структура на многообразии M - это четверка (α, D, Φ, g), где α – незамкнутая 1-форма на M, такая что $d\alpha$ есть регулярная 2-форма на M, D – рабочее расслоение для $d\alpha$, Φ – аффинор, ассоциированный с 2-формой $d\alpha$, и g – риманова метрика на M. Очевидно, что субтвисторная структура с точной фундаментальной 2-формой всегда индуцирует аффинорную метрическую структуру, а аффинорная метрическая структура индуцирует субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой. Для того, чтобы аффинорная метрическая структура $(\alpha, D, \Phi, g($ на многообразии M индуцировала субкэлерову структуру, достаточно найти в M подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$, и ограничение аффинора Φ на Q есть комплексная структура на Q. Построенная в [5] конструкция Бузби-Ванга дает главное расслоение над комплексным проективным пространством, слоем S^1 и аффинорной метрической структурой с радикалом ранга 1. Теперь теорема 2.8 дает, что эта аффинорная метрическая структура индуцирует субкэлерову структуру на этом расслоении. Частным случаем главного расслоения описанного в [5] является нечетномерная сфера. Таким образом получаем следующий результат:

Следствие 2.9. *Нечетномерная сфера S^{2n+1} не допускает кэлерову структуру, но допускает субкэлерову структуру с радикалом ранга 1.*

Пусть $\Lambda^2(M)$ – расслоение кососимметричных 2-форм над многообразием M. Если на M существует субтвисторная структура с фундаментальной 2-формой Ω, то Ω есть глобальное всюду отличное от нуля сечение векторного расслоения $\Lambda^2(M)$. Тогда класс Эйлера $e(\Lambda^2(M)) = 0$ (см. [6]). Пусть D – рабочее расслоение субтвисторной структуры, и $w_1(D)$ – первый класс Штиффеля-Уитни векторного расслоения D. Поскольку аффинор, ассоциированный с фундаментальной 2-формой Ω задает непрерывный выбор комплексной структуры в слоях рабочего расслоения, имеем $w_1(D) = 0$ (см. [6]). Таким образом мы получаем необходимые условия существования на многообразии M субтвисторной структуры:

Теорема 2.10. *Если вещественное многообразие M размерности ≥ 3 допускает субтвисторную (субкэлерову) структуру с рабочим расслоением D, то $e(\Lambda^2(M)) = w_1(D) = 0$.*

Поскольку для четырехмерной сферы S^4 расслоение $\Lambda^2(S^4$ диффеоморфно комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^3$ (см. [7]), а класс Эйлера комплексного проективного пространства отличен от нуля, получаем пример многообразия, не допускающего субтвисторную структуру:

Следствие 2.11. *Четырехмерная сфера не допускает субтвисторную структуру с радикалом любого допустимого ранга (0 или 2).*

Теперь изучим вопрос, когда субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной формой индуцирует субкэлерову структуру.

3. Тензор кручения субтвисторной структуры

Введенный в [2] тензор кручения субтвисторной структуры дает достаточное условие того, когда субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой индуцирует субкэлерову структуру, а ограничение аффинора на любое максимальное интегральное для рабочего расслоения подмногообразие есть комплексная структура на этом подмногообразии.

Определение 3.1. Тензором кручения субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, g) на многообразии M называется непрерывное тензорное поле N типа $(2,1)$, определенное на паре векторных полей $X, Y \in C^1(TM)$ следующим образом:

$$N(X,Y) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X,Y],$$

где $[X,Y]$ – скобка Ли векторных полей X и Y.

Из этого определения и предложения 2.4 следует, что для любого интегрального подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ ограничение тензора кручения N на Q есть тензор Нейенхейса почти комплексной структуры $\Phi|_Q$. Интегрируемость этой почти комплексной структуры на Q эквивалентна условию $N|_Q = 0$ (см. [8, глава 9]).

Теорема 3.2. *Пусть M – вещественное многообразие размерности $n \geq 3$, и (Ω, D, Φ, g) – субтвисторная структура на M с радикалом ранга $r \geq$*

1, замкнутой фундаментальной 2-формой Ω и нулевым тензором кручения. Тогда рабочее расслоение D есть вполне голономное распределение на M, любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ есть кэлерово подмногообразие комплексной размерности $\frac{n-r}{2}$, и (Q, Ω, D, Φ, g) есть субкэлерова структура на M.

Доказательство. Будем обозначать проекцию векторного поля X на распределение $\operatorname{rad}\Omega$ через X_R. Из свойств аффинора в предложении 2.4 следует, что $\Phi(TM) = D$. Если $X, Y \in C^1(D)$, то из определения 3.1 получаем:

$$N_R(X, Y) = [\Phi X, \Phi Y]_R.$$

Условие $N = 0$ влечет $N_R = 0$, откуда $[\Phi X, \Phi Y]_R = 0$. Поскольку Φ есть линейный автоморфизм слоев рабочего расслоения D, получаем, что распределение D инволютивно. По теореме Фробениуса инволютивное распределение вполне голономно, а следовательно, через каждую точку $x \in M$ проходит подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$. Ограничение аффинора Φ на любое такое подмногообразие есть почти комплексная структура на Q, и ограничение тензора кручения N на Q есть ее тензор Нейенхейса. Условие $N = 0$ влечет, что Φ есть комплексная структура на Q, и Q есть эрмитово подмногообразие. Поскольку ограничение 2-формы Ω на сечения рабочего расслоения D есть невырожденная замкнутая 2-форма, и $TQ = D|_Q$, Q есть кэлерово подмногообразие комплексной размерности $\frac{n-r}{2}$. Таким образом, выполнено определение 2.7, и теорема доказана. □

Замечание 3.3. В условии теоремы 3.2 можно убрать требование замкнутости фундаментальной 2-формы субтвисторной структуры. В этом случае любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ будет эрмитовым подмногообразием, эрмитова структура на котором есть ограничение метрики g и аффинора Φ на подмногообразие Q.

Субтвисторная структура (Ω, D, Φ, g) с ненулевым радикалом на многообразии M всегда задает разложение касательного расслоения TM в сумму Уитни распределений касательных подпространств D и $\operatorname{rad}\Omega$. С этой парой распределений можно связать структуру почти произведения $\psi : \psi|_D = \Phi^2 = -\operatorname{id}$, $\psi\big|_{\operatorname{rad}\Omega} = \operatorname{id}$, где id – поле тождественных операторов на M. Из пункта 3 теоремы 2.2 и теоремы 3.2 следует, что для субтвисторной структуры $(\Omega, D, \Phi, g) : d\Omega = 0$ с нулевым тензором кручения на многообразии M распределения D и $\operatorname{rad}\Omega$ инволютивны. Следовательно структура почти произведения ψ интегрируема, то есть ψ – структура произведения на M. Из теоремы Фробениуса и теоремы 3.2 следует, что через каждую точку многообразия M проходят кэлерово подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ и риманово подмногообразие $R : TR = \operatorname{rad}\Omega|_R$, такие что M локально изометрично прямому произведению $Q \times R$. Таким образом получаем:

Теорема 3.4. *Если вещественное многообразие M размерности ≥ 3 допускает субтвисторную структуру (Ω, D, Φ, g) с нулевым тензором кручения, то:*

1) *Если $d\Omega \neq 0$, то M локально изометрично прямому произведению эрмитова подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ и риманова подмногообразия $R : TR = \operatorname{rad}\Omega|_R$;*

2) *Если $d\Omega = 0$, то M локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ и риманова подмногообразия $R : TR = \operatorname{rad}\Omega|_R$.*

Простейшим примером многообразия, на котором существует субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и нулевым тензором кручения является прямое произведение кэлерова многообразия и риманова многообразия с метрикой прямого произведения. Заметим также, что субкэлерова структура может иметь неинволютивное рабочее расслоение и ненулевой тензор кручения, но в силу пункта 3 теоремы 2.2 радикал субкэлеровой структуры всегда есть инволютивное распределение. Из теории контактных структур (см. [4]) известно, что рабочее расслоение контактной метрической структуры не может быть инволютивным. Отсюда следует, что любая контактная метрическая структура на многообразии нечетной размерности индуцирует субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой, радикалом ранга 1 и ненулевым тензором кручения.

Замечание 3.5. Если многообразие P есть главное расслоение над кэлеровым многообразием M, и субтвисторная структура на P получена поднятием кэлеровой структуры с M, то такая субтвисторная структура всегда имеет нулевой тензор кручения и замкнутую фундаментальную 2-форму.

Теперь рассмотрим специальный класс субтвисторных структур, имеющих нулевой тензор кручения.

4. Нормальные субтвисторные структуры

В [9] было введено понятие нормальной аффинорной метрической структуры на группах Ли. Здесь мы обобщим это понятие на любые многообразия и субтвисторные структуры с произвольной фундаментальной 2-формой.

Определение 4.1. Субтвисторная структура (Ω, D, Φ, g) на многообразии M называется нормальной, если для любых $X \in C^1(D), Y \in C^1(TM)$ выполняется условие:

$$[\Phi X, Y] = \Phi[X, Y],$$

где $[X, Y]$ – скобка Ли векторных полей на M.

Примером многообразия с нормальной субтвисторной структурой является полупрямое произведение связной компактной группы Ли и абелевой группы Ли (см. § 5). сейчас мы докажем ключевой результат для нормальных субтвисторных структур.

Теорема 4.2. *Пусть M – вещественное многообразие размерности ≥ 3, и (Ω, D, Φ, g) – нормальная субтвисторная структура на M. Тогда рабочее расслоение D есть вполне голономное распределение на M, любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ есть эрмитово подмногообразие в M, и множество всех гладких сечений рабочего расслоения D есть идеал в алгебре векторных полей на M.*

Доказательство. Пусть N – тензор кручения субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, g). Из определения 3.1 для любых $X, Y \in C^1(D)$ имеем:

$$\begin{aligned} N(X,Y) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y] = \\ = \Phi^2[X, Y] - \Phi^2[X, Y] - \Phi^2[X, Y] + \Phi^2[X, Y] = 0. \end{aligned}$$

В силу предложения 2.4, для любых $X \in C^1(D), Y \in C^1(\operatorname{rad}\Omega)$ имеем:

$$N(X, Y) = -\Phi[\Phi X, Y] + \Phi^2[X, Y] = 0.$$

Поскольку $N\big|_{\operatorname{rad}\Omega} = 0$, окончательно получаем, что $N = 0$ на M. Из теоремы 3.2 и теоремы Фробениуса получаем, что рабочее расслоение D есть вполне голономное распределение на M, и любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ есть эрмитово подмногообразие в M.

Так как D – вполне голономное распределение на M, из теоремы Фробениуса следует, что D есть инволютивное распределение на M. Поскольку для любого $X \in C^1(TM)$ $\Phi X \in C^1(D)$. Для любых $X \in C^1(D), Y \in C^1(\mathrm{rad}\,\Omega)$ имеем:

$$[\Phi X, Y] = \Phi[X, Y] \in C^1(D).$$

Поскольку Φ есть линейный автоморфизм слоев рабочего расслоения D, распределение D инволютивно, и $C^1(TM) = C^1(D) \oplus C^1(\mathrm{rad}\,\Omega)$, получаем, что $C^1(D)$ есть идеал в $C^1(TM)$. □

Для нормальной субтвисторной структуры с замкнутой фундаментальной 2-формой получаем аналогичный результат:

Следствие 4.3. *Пусть M – вещественное многообразие размерности ≥ 3, и $(\Omega, D, \Phi, g) : d\Omega = 0$ – нормальная субтвисторная структура на M. Тогда рабочее расслоение D есть вполне голономное распределение на M, любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ есть кэлерово подмногообразие в M, и множество всех гладких сечений рабочего расслоения D есть идеал в алгебре векторных полей на M.*

Используя эти результаты и теорему 3.4, получаем:

Следствие 4.4. *Если вещественное многообразие M размерности ≥ 3 допускает нормальную субтвисторную структуру (Ω, D, Φ, g), то:*

1) *Если $d\Omega \neq 0$, то M локально изометрично прямому произведению эрмитова подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ и риманова подмногообразия $R : TR = \mathrm{rad}\,\Omega|_R$;*

2) *Если $d\Omega = 0$, то M локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ и риманова подмногообразия $R : TR = \mathrm{rad}\,\Omega|_R$.*

Замечание 4.5. Очевидно, что на любом многообразии с нулевой скобкой Ли векторных полей выполняется определение 4.1. Следовательно, любая субтвисторная структура на многообразии с нулевой скобкой Ли векторных полей является нормальной. В частности, любая субтвисторная структура является нормальной на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, n-мерном торе T^n и на их прямых произведениях.

Также можно отметить, что субтвисторная структура на прямом произведении кэлерова многообразия M и евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ или n-мерного тора T^n, полученная расширением кэлеровой структуры с M на прямое произведение, не является нормальной, однако имеет нулевой тензор кручения.

5. Нормальные субтвисторные структуры на группах Ли

Группы Ли позволяют построить нетривиальный класс примеров нормальных субтвисторных структур. В [9] были введены и описаны левоинвариантные аффинорные нормальные метрические структуры на группах Ли. Здесь мы обобщим их на любые субтвисторные структуры.

Пусть G – вещественная группа Ли размерности ≥ 3, $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G, и Ad_g – присоединенное представление элемента $g \in G$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Будем обозначать через dL_g дифференциал левого сдвига на элемент g, а через dR_g дифференциал правого сдвига на элемент g. Субтвисторная структура (Ω, D, Φ, ρ) на группе Ли G называется левоинвариантной, если рабочее расслоение D есть левоинвариантное распределение на G и для любого $g \in G$ выполняются условия:

$$\Omega_g \circ dL_g = \Omega_e,\ \ \rho_g \circ dL_g = \rho_e,\ \ \Phi_g \circ dL_g = dL_g \circ \Phi_e,$$

здесь e – единичный элемент группы G. Аналогично определяется правоинвариантная субтвисторная структура, заменой dL_g на dR_g. Биинвариантная субтвисторная структура определяется также, заменой dL_g на Ad_g. Из пункта 3 теоремы 2.2 следует, что если фундаментальная 2-форма левоинвариантной субтвисторной структуры замкнута, то радикал этой субтвисторной структуры есть подалгебра Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 5.1. Подгруппой радикала левоинвариантной субтвисторной структуры $(\Omega, D, \Phi, \rho) : d\Omega = 0$ называется связная подгруппа $R = \exp(\mathrm{rad}\,\Omega)$.

В [9] показано, что для левоинвариантной аффинорной метрической структуры (точнее для индуцированной этой структурой субтвисторной структоры) подгруппа радикала R есть компонента связности стабилизатора коприсоединенного действия группы Ли G на 1-форму α, а значит для биинвариантной аффинорной метрической структуры $R = G$, что невозможно, поскольку $\mathrm{rad}(d\alpha) \neq \mathfrak{g}$. Отсюда получаем:

Предложение 5.2. *Биинвариантная субтвисторная структура на группе Ли G не может иметь точную фундаментальную 2-форму.*

Отсюда сразу получаем:

Следствие 5.3. *Если вещественная группа Ли G имеет нулевую вторую группу когомологий $H^2(G, \mathbb{R})$, то на G не существует биинвариантных субтвисторных структур с замкнутой фундаментальной 2-формой, а следовательно биинвариантных субкэлеровых структур.*

Следующий результат дает класс примеров нормальных субтвисторных структур на группах Ли.

Теорема 5.4. *Любая биинвариантная субтвисторная структура на вещественной группе Ли G размерности ≥ 3 является нормальной.*

Доказательство. Пусть (Ω, D, Φ, ρ) – биинвариантная субтвисторная структура на группе G, $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы Ли G, и G_t – однопараметрическая подгруппа порожденная элементом $X \in D$. Для любого $Y \in \mathfrak{g}$ имеем:

$$\begin{gathered}[X, \Phi Y] = \tfrac{d}{dt}|_{t=0} \operatorname{Ad}_{G_t} \circ \Phi Y = \\ = \tfrac{d}{dt}|_{t=0} \Phi \circ \operatorname{Ad}_{G_t} Y = \Phi[X, Y], \\ [\Phi X, Y] = -[Y, \Phi X] = -\Phi[Y, X] = \Phi[X, Y].\end{gathered}$$

Мы получили, что (Ω, D, Φ, ρ) есть нормальная субтвисторная структура на группе Ли G. □

Пусть Ω – биинвариантная регулярная кососимметричная 2-форма с радикалом ранга r на связной компактной группе Ли G. На связной компактной группе Ли всегда существует биинвариантная риманова метрика ρ (см. [10]). Выберем рабочее расслоение D как ортогональное относительно метрики ρ дополнение к распределению $\mathrm{rad}\,\Omega$. Определим аффинор Φ, ассоциированный с 2-формой Ω с помощью условий из определения 2.3. Можно проверить, что рабочее расслоение D и аффинор Φ будут Ad_G-инвариантными. Теперь, из теоремы 5.4 получаем:

Предложение 5.5. *Любая регулярная биинвариантнаякососимметричная 2- форма с радикалом ранга r на связной компактной группе Ли G размерности ≥ 3 порождает, с точностью до выбора биинвариантной римановой метрики, нормальную субтвисторную структуру с радикалом ранга r.*

Следствие 4.4 позволяет описать структуру групп Ли с левоинвариантной нормальной субтвисторной структурой.

Следствие 5.6. *Если вещественная группа Ли G размерности ≥ 3 допускает нормальную левоинвариантную субтвисторную структуру (Ω, D, Φ, ρ), то:*

1) *Если $d\Omega \neq 0$, то группа Ли G изоморфна полупрямому произведению $R \rtimes Q$, где Q – подгруппа с левоинвариантной эрмитовой структурой, а R – подгруппа с левоинвариантной римановой метрикой;*

2) *Если $d\Omega = 0$, то группа Ли G изоморфна полупрямому произведению $R \rtimes Q$, где Q – подгруппа с левоинвариантной кэлеровой структурой, а R – подгруппа с левоинвариантной римановой метрикой.*

Обратно, на полупрямом произведении связной компактной группы Ли и абелевой группы Ли можно построить нормальную субтвисторную структуру.

Пример 5.7. Пусть $G = R \rtimes Q$ – полупрямое произведение связной компактной группы Ли Q и абелевой группы R. Пусть Ω_0 – левоинвариантная невырожденная кососимметричная 2-форма на Q. С помощью операции усреднения (см. [10]) 2-формы Ω_0 по группе Q можно получить биинвариантную невырожденную кососимметричную 2-форму Ω на группе Q. По предложению 5.5 эта 2-форма порождает биинвариантную нормальную субтвисторную структуру с радикалом ранга 0 на группе Q. Обозначим эту нормальную субтвисторную структуру через $(\Omega_Q, D_Q, \Phi_Q, \rho_Q)$. Пусть $\mathfrak{q}$ – алгебра Ли группы Q, а $\mathfrak{r}$ – алгебра Ли группы R. Продолжим 2-форму Ω_Q до кососимметричной 2-формы Ω на G, полагая $\Omega|_Q = \Omega_Q$, $\operatorname{rad}\Omega = \mathfrak{r}$, и продолжим аффинор Φ_Q до аффинора Φ на G, полагая $\Phi|_Q = \Phi_Q$, $\Phi|_R = 0$. В качестве левоинвариантной римановой метрики на группе Ли G возьмем метрику прямого произведения $\rho = \rho_Q + \rho_R$, где ρ_R – фиксированная левоинвариантная риманова метрика на абелевой группе R. Полагая $D = \mathfrak{q}$, получаем левоинвариантную нормальную субтвисторную структуру (Ω, D, Φ, ρ) с радикалом $\mathfrak{r}$. Эта нормальная субтвисторная структура является левоинвариантной на группе G, но не является биинвариантной на G, поскольку риманова метрика ρ в общем случае может не быть биинвариантной метрикой на G.

Заметим, что в примере 5.7 группа Ли G топологически изоморфна прямому произведению многообразий Q и R, но не изоморфна прямому произведению $R \times Q$ как группа. При этом, прямое произведение групп Ли $Q \times R$ является частным случаем примера 5.7.

6. Обобщение структуры Сасаки

Для контактной метрической структуры на многообразии M нечетной размерности хорошо известна процедура ее расширения до эрмитовой структуры на прямом произведении $M \times \mathbb{R}$ (см. [4]). Эта структура называется структурой Сасаки. Здесь мы обобщим структуру Сасаки на многообразия произвольной размерности с аффинорной метрической структурой.

Пусть M – вещественное многообразие размерности $n \geq 3$, и (α, D, Φ, g) – аффинорная метрическая структура с радикалом ранга r на M. Рассмотрим прямое произведение $P = M \times T^r$, где T^r – тор размерности r. Тогда $TP = D \oplus \mathrm{rad}(d\alpha) \oplus T(T^r)$. При этом $\mathrm{rank}(\mathrm{rad}(d\alpha) \oplus T(T^r) = 2r$. Из предложения 2.3 следует, что аффинор Φ есть комплексная структура в слоях рабочего расслоения D. Зададим в слоях расслоения $\mathrm{rad}(d\alpha) \oplus T(T^r)$ комплексную структуру Ψ. Тогда на многообразии P определена почти комплексная структура $J = (\Phi, \Psi)$, такая что для любого $X = X_D + X_R \in C^1(TP)$ $JX = \Phi X_D + \Psi X_R$, здесь X_D – проекция векторного поля X на рабочее расслоение D, а X_R – проекция X на $\mathrm{rad}(d\alpha) \oplus T(T^r)$.

Определение 6.1. Пусть (α, D, Φ, g) – аффинорная метрическая структура с неинволютивным рабочим расслоением D на вещественном многообразии M размерности $n \geq 3$. Обобщенной структурой Сасаки для этой аффинорной метрической структуры называется эрмитова структура (J, h) на прямом произведении $M \times T^r$, где r – ранг радикала 2-формы $d\alpha$, T^r – тор размерности r, $J = (\Phi, \Psi)$ – комплексная структура на $M \times T^r$, и h – эрмитова метрика на $M \times T^r$, такая что $h|_D = g|_D$, и $h \circ J = h$.

Замечание 6.2. Поскольку в определении 6.1 предполагается, что рабочее расслоение неинволютивно, обобщенную структуру Сасаки нельзя определить для аффинорной метрической структуры, индуцирующей субтвисторную структуру с нулевым тензором кручения (см. теорему 3.2). В частности, для нормальной субтвисторной структуры с точной фундаментальной 2-формой.

Пример 6.3. Рассмотрим обобщенное расслоение Хопфа $P = S^{2n+1} \times T^m$, где S^{2n+1} – $2n+1$-мерная сфера, T^m – m-мерный тор. Поскольку $T^m \cong S^1 \times \ldots \times S^1$, и S^1 свободно действует на S^{2n+1}, P есть расслоение над комплексным проективным пространством $\mathbb{C}P^n$ со слоем T^{m+1}. Подробнее см. в [8]. Используя конструкции описанные в [5] мы можем построить на P аффинорную метрическую структуру (α, D, Φ, g) с радикалом ранга $r = m+1$ и неинволютивным рабочим расслоением D. Положим $K = P \times T^{m+1}$. K есть расслоение над $\mathbb{C}P^n$ со слоем T^{2m+2}. Заметим, что из конструкции Бузби-Ванга в [5] следует, что ограничение аффинора Φ на сечения рабочего расслоения D действует как умножение на мнимую единицу i. Обозначим через e_k векторное поле, касательное к k-тому сомножителю S^1 в торе T^{2m+2}. На торе T^{2m+2} существует стандартная комплексная структура $\Psi : \Psi e_k = e_{m+k+1}$ при $k \leq m+1$, $\Psi e_{m+k+1} = -e_k$. Положим $J = (\Phi, \Psi)$. Прямое вычисление тензора Нейенхейса почти комплексной структуры J на K дает, что он равен нулю. Таким образом, J есть комплексная структура на K. Положим $h = g_D + g_R$, где $g_D = g|_D$, g_R – стандартная плоская метрика на торе T^{2m+2}. Теперь мы получаем обобщенную структуру Сасаки (J, h) на K.

Обобщенная структура Сасаки позволяет получить интересные геометрические характеристики пространства, на котором задана эта структура.

Предложение 6.4. *Пусть (α, D, Φ, g) – аффинорная метрическая структура с неинволютивным рабочим расслоением и радикалом ранга r на вещественном многообразии M размерности ≥ 3, и $(J, h), J = (\Phi, \Psi)$ – соответствующая обобщенная структура Сасаки на многообразии $P = M \times T^r$. Тогда через каждую точку $x \in P$ проходит интегральное* *подмногообразие $Q : TQ = (\mathrm{rad}(d\alpha) \oplus T(T^r))|_Q$, и $(\Psi, h)|_Q$ есть эрмитова структура на Q. То есть P есть слоение с эрмитовыми слоями комплексной размерности r.*

Доказательство. Из пункта 3 теоремы 2.2 следует, что распределение $\mathrm{rad}(d\alpha)$ инволютивно. Следовательно распределение $S = \mathrm{rad}(d\alpha) \oplus T(T^r)$ также инволютивно. По теореме Фробениуса распределение S вполне голономно, то есть через каждую точку $x \in P$ проходит интегральное подмногообразие $Q : TQ = S|_Q$. Для любого такого подмногообразия Q $J|_Q = \Psi|_Q$. Так как J есть комплексная структура на P, ограничение на Q эрмитовой структуры (Ψ, h) есть эрмитова структура на Q, и многообразие P есть слоение с эрмитовыми слоями комплексной размерности r. □

Фундаментальной 2-формой обобщенной структуры Сасаки (J, h) называется невырожденная кососимметричная 2-форма

$$\Theta : \Theta(X, Y) = h(JX, Y), X, Y \in C^1(TP),$$

где P – прямое произведение из определения 6.1. Из предложения 6.4 получаем:

Следствие 6.5. *Пусть (α, D, Φ, g) – аффинорная метрическая структура с неинволютивным рабочим расслоением и радикалом ранга r на вещественном многообразии M размерности ≥ 3, и $(J, h), J = (\Phi, \Psi)$ – соответствующая обобщенная структура Сасаки с замкнутой фундаментальной 2-формой Ω на многообразии $P = M \times T^r$. Тогда через каждую точку $x \in P$ проходит интегральное подмногообразие $Q : TQ = (\mathrm{rad}(d\alpha) \oplus T(T^r))|_Q$, и $(\Omega, \Psi, h)|_Q$ есть кэлерова структура на Q. То есть P есть слоение с кэлеровыми слоями комплексной размерности r.*

Замечание 6.6. Если Θ – фундаментальная 2-форма обобщенной структуры Сасаки, соответствующей аффинорной метрической структуре (α, D, Φ, g) с радикалом ранга r, то, поскольку $\Theta|_D = d\alpha|_D$, фундаментальная 2-форма замкнута тогда и только тогда, когда замкнуто ее ограничение на сечения распределения $\mathrm{rad}(d\alpha) \oplus T(T^r)$.

Замечание 6.7. Поскольку любая субтвисторная структура с точной фундаментальной 2-формой порождает аффинорную метрическую структуру, с каждой такой субтвисторной структурой можно связать обобщенную структуру Сасаки. Более того, обобщенную структуру Сасаки можно определить для любой субтвисторной структуры даже с не точной фундаментальной 2-формой Ω, используя во всех понятиях и результатах выше $\operatorname{rad}\Omega$ вместо $\operatorname{rad}(d\alpha)$. Однако в этом случае классическая структура Сасаки для контактных метрических структур не будет частным случаем обобщенной структуры Сасаки.

Список литературы

[1] Корнев Е. С. *Субкомплексные и субкэлеровы структуры*, Сиб. матем. журн. 57 (5), 1062-1077 (2016).

[2] Корнев Е. С. *Субкэлеровы и сублагранжевы подмногообразия* Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 84, 23-35. (2023).

[3] Корнев Е. С. *Аффинорные структуры на векторных расслоениях* Сиб. матем. журн. 55 (6), 1283-1296 (2014).

[4] Blair D. E. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manyfolds*, Birkhauser, Boston, 2010.

[5] Boothby W., Wang H. *On contact manifolds* Annals of Math. 68, 721-734, (1958).

[6] Милнор Дж., Сташеф Дж. *Характеристические классы* Москва: Мир, (1979).

[7] Сергеев А. Г. *Гармонические отображения* Лекц. курсы НОЦ, 10, 3-117, Москва: МИАН, (2008).

[8] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии* В 2 т. Москва: Наука, (1981).

[9] Корнев Е. С. *Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли* Сиб. матем. журн. 53 (1), 107-123, (2012).

[10] Бессе А. *Многообразия Эйнштейна* В 2-х т. Москва: Мир, (1990).