Лежандровы подмногообразия

Корнев Е. С.

УДК 514.765

Аннотация.

В работе рассматриваются подмногообразия, касающиеся во всех своих точках рабочего расслоения аффинорной метрической структуры. Это расслоение является обобщением контактного распределения контактной метрической структуры, а аффинорная метрическая структура есть обобщение контактной метрической структуры на многообразия произвольной размерности. Такие подмногообразия называются лежандровыми подмногообразиями. Рассмотрены лежандровы подмногообразия общего вида и их частные случаи: лежандровы кривые и однородные лежандровы подмногообразия.

Ключевые слова: Аффинорная метрическая структура, 1-форма с нетривиальным радикалом, лежандрово подмногообразие, лежандрова кривая, однородное пространство.

1. Введение

В классической римановой геометрии на многообразиях нечетной размерности широко изучены так называемые контактные метрические структуры (см. [1]). Аффинорная метрическая структура – это обобщение контактной метрической структуры на многообразия и векторные расслоения произвольной размерности. Аффинорные метрические структуры были введены и описаны для групп Ли в [2], а для алгеброидов Ли и многообразий в [3]. В общем случае, аффинорная метрическая структура это следующий набор объектов: (α, D, Φ, g), где α – незамкнутая 1-форма, внешний дифференциал которой есть регулярная внешняя 2-форма, D

– распределение касательных подпространств, такое что ограничение $d\alpha$ на сечения этого распределения есть невырожденная 2-форма, Φ – непрерывное поле эндоморфизмов касательных подпространств, связывающее риманову метрику g и внешний дифференциал $d\alpha$. Поле эндоморфизмов Φ называется аффинором, ассоциированным с 1-формой α. Аффинорные метрические структуры можно рассматривать как на нечетномерных, так и на четномерных многообразиях. Распределение D называется рабочим расслоением аффинорной метрической структуры и может быть как голономным, так и не голономным. В случае, когда рабочее расслоение D не голономно многообразие M, на котором рассматривается аффинорная метрическая структура, не содержит интегральных максимальных подмногообразий для распределения D. Однако, многообразие может содержать интегральные подмногообразия для распределения D не максимальной размерности. Такие подмногообразия называются лежандровыми подмногообразиями. В контактной геометрии широко изучаются лежандровы подмногообразия и их частный случай – лежандровы кривые. Однако контактная метрическая структура является лишь частным случаем аффинорной метрической структуры, когда размерность многообразия нечетна, а ранг радикала внешнего дифференциала $d\alpha$ равен 1. В данной работе лежандровы подмногообразия рассматриваются для самого общего случая аффинорной метрической структуры, когда многообразие имеет произвольную размерность, а ранг внешней 2-формы $d\alpha$ имеет любое допустимое значение. Важным частным случаем лежандровых подмногообразий являются так называемые сублагранжевы подмногообразия. Сублагранжевы подмногообразия были введены и описаны в [4]. Данная работа расширяет класс изученных в [4] подмногообразий до лежандровых подмногообразий. Некоторые результаты для общего случая аффинорной метрической структуры совпадают с известными результатами для контактных метрических структур, а некоторые являются специфичными для случая, когда ранг радикала 2-формы $d\alpha$ больше 1.

Лежандровы подмногообразия имеют широкий практический смысл, они используются в механике, гидродинамике, физике магнитных полей, и многих других разделах, где возникают метрические структуры, фундаментальная 2-форма которых есть внешний дифференциал 1-формы, порожденной векторным полем. Более подробно. Пусть V – векторное поле на многообразии M, $(.,.)$ – скалярное произведение векторных полей на многообразии M, и dr – векторное поле инфинитезимальных смещений на M. Тогда на M определена 1-форма

$$\alpha = (V, dr).$$

Эта 1-форма порождает внешнюю 2-форму $d\alpha$, связывая эту 2-форму с заданным скалярным произведением посредством аффинора Φ, получаем аффинорную метрическую структуру на многообразии M. Теперь, для применения различных формул, выражающих значения физических характеристик векторного поля V в ограниченной области через значение на границе этой области, в частности, формула Стокса, формула работы силы по кривой и так далее, необходимо рассматривать подмногообразия, касающиеся во всех своих точках рабочего расслоения для полученной аффинорной метрической структуры, поскольку на таких подмногообразиях 2-форма $d\alpha$ может быть отлична от тождественно нулевой формы. Это приводит к изучению лежандровых подмногообразий.

Структура работы следующая: в § 2 приведены основные определения и сведения для аффинорных метрических структур. В § 3 отдельно рассмотрен важный частный случай аффинорных метрических структур – строгие аффинорные метрические структуры. В § 4 дано определение лежандрова подмногообразия, а также приведены важные свойства и примеры лежандровых подмногообразий. В § 5 рассмотрен важный частный случай лежандровых подмногообразий – лежандровы кривые. И, наконец, в § 6 рассмотрены однородные лежандровы подмногообразия. Многие определения и результаты в данной работе используют материал из работ [2-4].

2. Аффинорные метрические структуры

В этом разделе мы приведем необходимые понятия и сведения об аффинорных метрических структурах, полагаясь на [3].

Пусть M – многообразие класса C^∞, и α – незамкнутая 1-форма класса C^∞ на M.

Определение 2.1. Радикалом 1-формы α в точке$x \in M$ называется касательное подпространство

$$\operatorname{rad} \alpha_x = \{v \in T_xM : \mathrm{I}_v d\alpha_x = 0\},$$

Где $d\alpha$ – внешний дифференциал 1-формы α, $\mathrm{I}_v\, d\alpha$ – внутреннее произведение вектора v и 2-формы $d\alpha$. Радикалом 1-формы α на многообразии M называется распределение касательных подпространств

$$\operatorname{rad}\alpha = \bigcup_{x\in M} \operatorname{rad}\alpha_x.$$

1-форма α называется регулярной, если распределение $\operatorname{rad}\alpha$ регулярно, то есть, имеет одинаковый ранг во всех точках из M.

Из этого определения следует, что когда 1-форма α замкнута, $\operatorname{rad}\alpha = TM$, а когда $\operatorname{rad}\alpha = \{0\}$, $d\alpha$ есть точная симплектическая форма на M. В [2] получен следующий ключевой результат для ранга радикала регулярной 1-формы:

Теорема 2.2. *Пусть α – незамкнутая регулярная 1-форма с радикалом ранга r на многообразии M размерности $n \geqslant 3$. Тогда:*

1) Если n четно, то и r четно, и

$$0 \leqslant r \leqslant n-2;$$

2) Если n нечетно, то и r нечетно, и

$$1 \leqslant r \leqslant n-2.$$

Рабочим расслоением для регулярной 1-формы α на многообразии M называется распределение касательных подпространств D, дополнительных к $\operatorname{rad}\alpha$, такое, что ограничение 2-формы $d\alpha$ на сечения распределения D есть невырожденная 2-форма. Поскольку разность любых чисел одинаковой четности всегда есть четное число, из теоремы 2.2 получаем, что ранг рабочего расслоения на многообразии любой размерности всегда четный. Это позволяет определить понятие аффинора, которое обобщает понятие почти комплексной структуры на многообразии.

Определение 2.3. Пусть α – регулярная незамкнутая 1-форма на многообразии M, D – рабочее расслоение для α, и g – риманова метрика на M. Аффинором, ассоциированным с 1-формой α на многообразии M, называется непрерывное поле эндоморфизмов Φ касательных подпространств на M, такое что:

$$d\alpha(X,Y) = g(\Phi X, Y),\ X,Y \in C^\infty(TM),$$
$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X,Y),\ X,Y \in C^\infty(D).$$

Из этого определения можно получить следующие свойства аффинора (см. [3]):

Предложение 2.4. *Пусть α – регулярная незамкнутая 1-форма на многообразии M с рабочим расслоением D, Φ – аффинор, ассоциированный с 1-формой α, и* id *– поле тождественных операторов на M Тогда:*

1) $\ker\Phi = \mathrm{rad}\,\alpha$*;*

2) $\Phi^2|_D = -\,\mathrm{id}$*;*

3) $\Phi^*(d\alpha) = d\alpha \circ \Phi = d\alpha$*;*

4) $d\alpha(X, \Phi X) \geqslant 0,\ X \in C^\infty(TM)$*.*

Эти свойства иногда принимают за определение аффинора, без учета римановой метрики. Как видно из предложения 2.4, аффинор есть комплексная структура в слоях рабочего расслоения D, а при $\mathrm{rad}\,\alpha = \{0\}$ Φ есть почти комплексная структура на многообразии. Теперь мы можем определить понятие аффинорной метрической структуры.

Определение 2.5. Аффинорной метрической структурой на многообразии M размерности $\geqslant 3$ называется четверка $)\alpha, D, \Phi, g)$, где α – незамкнутая регулярная 1-форма на многообразии M, D – рабочее расслоение для 1-формы α, Φ – аффинор, ассоциированный с 1-формой α, и g – риманова метрика на M.

Замечание 2.6. Из определения 2.5 и предложения 2.4 следует, что для аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, g) распределения D и $\mathrm{rad}\,\alpha$ ортогональны относительно римановой метрики g. А аффинор Φ есть ортогональная комплексная структура в слоях рабочего расслоения D.

Контактная метрическая структура на нечетномерном многообразии есть пример аффинорной метрической структуры с радикалом ранга 1, а кэлерова структура с точной фундаментальной 2-формой на четномерном многообразии есть пример аффинорной метрической структуры с радикалом ранга 0. Пример аффинорной метрической структуры с радикалом максимально возможного по теореме 2.2 ранга можно найти в [3]. В [2] доказано, что радикал аффинорной метрической структуры всегда есть инволютивное распределение. Отсюда, по теореме Фробениуса получаем, что радикал аффинорной метрической структуры всегда есть вполне голономное распределение касательных подпространств. Рабочее расслоение аффинорной метрической структуры с нетривиальным радикалом может быть как голономным, так и не голономным распределением. В [4] приведены условия, при которых рабочее расслоение инволютивно, а следовательно и вполне голономно. Сейчас мы получим условие, при котором рабочее расслоение не может быть инволютивным.

Предложение 2.7. *Пусть (α, D, Φ, g) – аффинорная метрическая структура на многообразии M размерности $\geqslant 3$, и $D \subseteq \ker \alpha$. Тогда распределение D неинволютивно.*

Доказательство. Пусть $[X, Y]$ – скобка Ли векторных полей X и Y на многообразии M. Предположим, что для любых $X, Y \in C^\infty(D)[X, Y] \in C^\infty(D)$. Используя инвариантное определение внешнего дифференциала (см. [5]) и условие $D \subseteq \ker \alpha$, получаем:

$$2\, d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) = 0,$$

Но из определения 2.5 следует, что 1-форма не замкнута. Следовательно, распределение не может быть инволютивным, а значит и голономным. $\square$

Далее мы опишем класс аффинорных метрических структур, обладающих свойством как в предложении 2.7.

3. Характеристическое векторное поле

Здесь мы опишем характеристическое векторное поле, обобщающее поле Риба (см. [1]), и связанный с ним важный класс так называемых строгих аффинорных метрических структур.

Пусть (α, D, Φ, g) – аффинорная метрическая структура на многообразии M класса C^∞. По теореме Рисса о линейном функционале (см. [6]) на M существует единственное векторное поле $\xi : \alpha = \mathrm{I}_\xi\, g$, где $\mathrm{I}_\xi\, g$ – внутреннее произведение, как в определении 2.1. Это векторное поле называется характеристическим векторным полем аффинорной метрической структуры. Сразу из определения следуют следующие свойства характеристического векторного поля:

Предложение 3.1. *Пусть ξ характеристическое векторное поле аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, g) на многообразии M. Тогда:*

1) $\alpha(\xi) = g(\xi, \xi) = |\xi|^2$*;*

2) *Распределение* $\ker \alpha$ *имеет постоянный ранг во всех точках из M тогда и только тогда, когда векторное поле $\xi \neq 0$ всюду на M;*

3) $\alpha(\Phi X) = -d\alpha(\xi, X), \ X \in C^\infty(TM)$*;*

4) *Векторное поле ξ ортогонально распределению D относительно римановой метрики g.*

Определение 3.2. Строгой аффинорной метрической структурой называется аффинорная метрическая структура (α, D, Φ, g) с характеристическим векторным полем ξ, такая что $\xi \in C^\infty(\operatorname{rad} \alpha)$.

Используя это определение, предложение 3.1 и определение производной Ли 1-формы в направлении векторного поля (см. [5]), получаем следующий результат:

Теорема 3.3. *Пусть $)\alpha, D, \Phi, g)$ – аффинорная метрическая структура с характеристическим векторным полем ξ. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) (α, D, Φ, g) *– строгая аффинорная метрическая структура;*

2) $\Phi\xi = 0$*;*

3) $\mathrm{L}_\xi \, \alpha = d|\xi|^2$*, где* $\mathrm{L}_\xi \, \alpha$ *– производная Ли 1-формы α вдоль векторного поля ξ.*

Из пункта 3 этой теоремы получаем:

Следствие 3.4. Аффинорная метрическая структура (α, D, Φ, g) с характеристическим векторным полем ξ постоянной длины является строгой тогда и только тогда, когда $\mathrm{L}_\xi \, \alpha = 0$.

Простейшим примером строгой аффинорной метрической структуры является контактная метрическая структура на нечетномерном многообразии. В этом случае, характеристическое векторное поле порождает радикал ранга 1, а рабочее расслоение совпадает с контактным распределением, а следовательно не является голономным (см. [1]). Сейчас мы обобщим этот факт на произвольные строгие аффинорные метрические структуры.

Предложение 3.5. *Рабочее расслоение строгой аффинорной метрической структуры с радикалом ранга $\geqslant 1$ на многообразии M размерности $\geqslant 3$ неинволютивно, а следовательно неголономно.*

Доказательство. Пусть (α, D, Φ, g) – строгая аффинорная метрическая структура с нетривиальным радикалом и характеристическим векторным полем ξ на многообразии M. Из замечания 2.6 следует, что $\operatorname{rad}\alpha$ ортогонально D относительно римановой метрики g, а из пункта 4 предложения 3.1 следует, что ξ ортогонально $\ker\alpha$. Поскольку $\xi \in C^\infty(\operatorname{rad}\alpha)$, получаем, что $D \subseteq \operatorname{rad}\alpha$. Теперь утверждение вытекает из предложения 2.7. □

Предложение 3.6. *Аффинорная метрическая структура (α, D, Φ, g) с радикалом ранга $\geqslant 1$, является строгой тогда и только тогда, когда $D \subseteq \ker\alpha$.*

Доказательство. Пусть (α, D, Φ, g) – строгая аффинорная метрическая структура, и ξ – ее характеристическое векторное поле. Так же, как в доказательстве предложения 3.5 получаем, что $D \subseteq \ker\alpha$.

Обратно, если $D \subseteq \ker\alpha$, то из пункта 4 предложения 3.1 получаем, что ξ ортогонально D относительно римановой метрики g. Теперь, из замечания 2.6 получаем, что $\xi \in C^\infty(\operatorname{rad}\alpha)$. □

Замечание 3.7. Простой класс примеров многообразий, с нестрогой аффинорной метрической структурой (α, D, Φ, g) с характеристическим векторным полем $\xi : \xi \in C^\infty(D)$ дает прямое произведение многообразий $P \times Q$, где $\alpha|_P \neq 0$ и $TQ \subset \ker\alpha$.

Пусть $e(M)$ – класс Эйлера многообразия M. Если на M существует векторное поле, отличное от нуля в каждой точке из M, то $e(M) = 0$ (см. [7]). Отсюда получаем необходимое условие существования аффинорной метрической структуры:

Предложение 3.8. *Если вещественное многообразие M размерности $\geqslant 3$ допускает аффинорную метрическую структуру с характеристическим векторным полем, всюду отличным от 0 на M, то класс Эйлера многообразия M равен 0.*

Если M – компактное многообразие без края, и $\chi(M)$ его эйлерова характеристика, то $\chi(M) = 0$ (см. [7]). Отсюда получаем:

Следствие 3.9. Если вещественное компактное многообразие без края размерности $\geqslant 3$ допускает аффинорную метрическую структуру с характеристическим векторным полем, всюду отличным от 0 на M, то его эйлерова характеристика равна 0.

Более подробные необходимые топологические условия существования аффинорной метрической структуры можно найти в [3].

4. Лежандровы подмногообразия

Здесь мы приведем основные свойства и примеры лежандровых подмногообразий, обобщая это понятие для произвольной аффинорной метрической структуры. Поскольку для аффинорной метрической структуры на многообразии с инволютивным рабочим расслоением по теореме Фробениуса через каждую точку проходит интегральное подмногообразие , нетривиальным случаем для изучения подмногообразий, касающихся рабочего расслоения, является случай, когда рабочее расслоение неинволютивно.

Пусть (α, D, Φ, g) – аффинорная метрическая структура с нетривиальным радикалом и неинволютивным рабочим расслоением D на многообразии M класса C^∞. Лежандровым подмногообразием для этой аффинорной метрической структуры называется подмногообразие $Q : TQ \subset D|_Q$. Заметим, что для субтвисторных структур с точной фундаментальной 2-формой сублагранжевы подмногообразия введенные в [4] всегда являются лежандровыми подмногообразиями. Кроме того, любая кривая $\gamma(t) : \dot\gamma(t) \in C^\infty(D)$, где $\dot\gamma(t)$ – касательный вектор к кривой $\gamma(t)$, есть лежандрово подмногообразие размерности 1. Из предложения 3.5 следует, что рабочее расслоение строгой аффинорной метрической структуры всегда неинволютивно. Сейчас мы получим верхнюю границу размерности лежандровых подмногообразий для строгих аффинорных метрических структур.

Предложение 4.1. *Пусть* (α, D, Φ, g) *– строгая аффинорная метрическая структура с радикалом ранга* $r \geqslant 1$ *на многообразии* M *размерности* $n \geqslant 3$. *Тогда размерность любого лежандрова подмногообразия в* $M \leqslant \frac{n-r}{2}$.

Доказательство. Пусть Q – лежандрово подмногообразие в M. Из предложения 3.6 следует, что $TQ \subset D \subseteq \ker \alpha$. Поскольку касательное расслоение TQ есть инволютивное распределение на Q, из определения внешнего дифференциала 1-формы для любых $X, Y \in C^\infty(TQ)$ получаем:

$$2\, d\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]) = 0.$$

Из определения 2.3 получаем:

$$g(\Phi X, Y) = d\alpha(X,Y) = 0.$$

То есть распределения TQ и $\Phi(TQ)$ ортогональны. Поскольку аффинор Φ есть автоморфизм слоев рабочего расслоения, и $\mathrm{rank}(\Phi(TQ)) = \mathrm{rank}(TQ)$, получаем:

$$2\mathrm{rank}(TQ) = \mathrm{rank}(TQ \oplus \Phi(TQ)) \leqslant \mathrm{rank}(D) = n - r.$$

$\square$

Из доказательства предложения 4.1 получаем:

Следствие 4.2. Пусть (α, D, Φ, g) – строгая аффинорная метрическая структура на многообразии M размерности $\geqslant 3$. Тогда для любого лежандрова подмногообразия Q $d\alpha|_Q = 0$.

Это следствие показывает, что лежандрово подмногообразие максимально возможной размерности для строгой аффинорной метрической структуры есть сублагранжево подмногообразие для соответствующей субтвисторной структуры (см. [4]). Кроме того, это показывает, что ограничение 2-формы $d\alpha$ на лежандрово подмногообразие четной размерности не может быть симплектической структурой. Сейчас мы покажем, что и ограничение аффинора Φ на лежандрово подмногообразие четной размерности не может быть почти комплексной структурой.

Предложение 4.3. *Пусть* (α, D, Φ, g) *– строгая аффинорная метрическая структура на многообразии* M. *Тогда для любого четномерного лежандрова подмногообразия* Q *ограничение аффинора* Φ *на* Q *не может быть почти комплексной структурой на*Q.

Доказательство. Пусть Q – четномерное лежандрово подмногообразие в M. Предположим, что ограничение аффинора Φ на Q есть почти комплексная структура на подмногообразии Q. Из определения почти комплексной структуры на многообразии (см. [5, глава 9]) следует, что касательное расслоение TQ есть инвариантное под действием поля эндоморфизмов Φ распределение на Q. Но из доказательства предложения 4.1 следует, что распределение $\Phi(TQ)$ ортогонально распределению TQ относительно римановой метрики g. Следовательно, ограничение аффинора Φ на Q не может быть почти комплексной структурой. □

Замечание 4.4. Все результаты, полученные выше для строгих аффинорных метрических структур, остаются справедливыми в случае, когда (α, D, Φ, g) – нестрогая аффинорная метрическая структура с нетривиальным радикалом, и Q – лежандрово подмногообразие, такое что $TQ \subset (D \cap \ker \alpha)\big|_Q$.

Теперь приведем некоторые примеры лежандровых подмногообразий.

Пример 4.5. Рассмотрим прямое произведение $M = S^{2n+1} \times T^{r-1}$, где S^{2n+1} – сфера размерности $2n+1$, а T^{r-1} – тор размерности $r-1$. Группа $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ действует на S^{2n+1} и порождает векторное поле ξ на S^{2n+1}, касательное к орбите этого действия. Пусть g_0 – риманова метрика на сфере S^{2n+1}. Векторное поле ξ порождает регулярную 1-форму $\alpha = \mathrm{I}_\xi\, g_0$ на S^{2n+1}. В [8] показано, что $\operatorname{rad}\alpha = \mathbb{R}\,\xi$, и распределение $D = \ker\alpha$ неинволютивно. Поскольку сфера S^{2n+1} есть главное расслоение над комплексным проективным пространством $\mathbb{C}P^n$ со слоем S^1, многообразие M есть главное расслоение над $\mathbb{C}P^n$ со слоем $T^r = S^1 \times T^{r-1}$, а распределение D есть связность на этом расслоении. Продолжим 1-форму α на M, полагая $\alpha\big|_{T^r} = 0$. Пусть $g = g_0 + g_1$ – риманова метрика на M, где g_1 – риманова метрика на торе T^{r-1}. В [4] показано, что комплексная структура в пространстве $\mathbb{C}P^n$ порождает аффинор Φ на главном расслоении M, ассоциированный с 1-формой α. Мы получили строгую аффинорную метрическую структуру (α, D, Φ, g) на M с радикалом $T(T^r)$ ранга r. Пространство $\mathbb{C}P^n$ содержит подмногообразие S вещественной размерности n:

$$S = \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} : \mathrm{im}(z_k) = \mathrm{re}(z_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n\}.$$

Пусть π – проекция $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$. В [4] показано, что $\pi^{-1}(S)$ есть сублагранжево подмногообразие размерности n в M. Теперь получаем, что для любого подмногообразия $Q \subseteq \pi^{-1}(S)$ есть лежандрово подмногообразие в M.

Пример 4.6. Пусть P главное расслоение над эрмитовым многообразием M со структурной абелевой группой G размерности r, например, G есть тор размерности r. Пусть D – связнасть на главном расслоении P, ω – форма связности, и Ω – форма кривизны связности D, такая что $\Omega \circ d\pi = \Omega_0$, где Ω_0 – фундаментальная 2-форма эрмитовой структуры на M, π – проекция $P \to M$. Это влечет, что 2-форма Ω не вырождена на сечениях распределения D. Последнее условие означает, что хотя бы одна из координатных 1-форм ω_k, $\quad 1 \leqslant k \leqslant r$ не замкнута. И не вырождена на сечениях распределения D. Положим $\alpha = \omega_k$. Поскольку алгебра Ли группы G коммутативна, структурное уравнение для формы кривизны связности имеет вид: $\Omega = d\omega$. Так как $\ker(d\pi) = TG$ и 2-форма $\Omega = d\omega$ не вырождена на сечениях распределения D, $\operatorname{rad}\omega = TG$, а следовательно и $\operatorname{rad}\alpha = TG$. Эрмитова метрика на базе M и риманова метрика на слоях главного расслоения порождают риманову метрику g на многообразии P. Также, как в примере 4.5, комплексная структура на базе M порождает аффинор Φ на P. Мы получили аффинорную метрическую структуру (α, D, Φ, g) с радикалом ранга r на P. Из определения формы связности следует, что $D \subset \ker\alpha$. Из предложения 3.6 сразу получаем, что эта аффинорная метрическая структура строгая.

Для каждой точки $x \in P$ обозначим через Γ_x множество всех кривых, выходящих из точки x, таких, что для любой кривой $\gamma(t) \in \Gamma_x$ касательный вектор $\dot{\gamma}(t) \in D\big|_{\gamma(t)}$ при любом значении параметра t. Тогда любое подмногообразие $Q_x \subset \Gamma_x$ Есть лежандрово подмногообразие в P. Кроме того, из предложения 4.1 следует, что Q_x не может совпадать с Γ_x.

Пример 4.7. Пусть (α, D, Φ, g) – нестрогая аффинорная метрическая структура на многообразии M размерности $\geqslant 3$ с характеристическим векторным полем ξ. Тогда проекция Z векторного поля ξ на рабочее расслоение D есть всюду ненулевое векторное поле на M, такое что $Z \in C^\infty(D)$. Поскольку аффинор Φ есть ортогональная комплексная структура в слоях рабочего расслоения D, векторные поля Z и ΦZ ортогональны относительно метрики g в каждой точке из M. Если скобка Ли $[Z, \Phi Z] = \lambda Z$, где $\lambda \in C^\infty(M)$. Эти векторные поля порождают инволютивное распределение K ранга 2. По теореме Фробениуса через каждую точку $x \in M$ проходит интегральное подмногообразие $Q_x : TQ_x = K\big|_{Q_x}$.

Так как на двумерном многообразии любая почти комплексная структура интегрируема (см. [5, глава 9]), ограничение аффинора Φ на подмногообразие Q_x есть комплексная структура на Q_x. Теперь получаем, что через каждую точку $x \in M$ проходит лежандрова комплексная кривая Q_x, а ограничение аффинорной метрической структуры на Q_x индуцирует кэлерову структуру на Q_x.

Замечание 4.8. Пример 4.7 можно обобщить, если рассматривать произвольную аффинорную метрическую структуру с нетривиальным радикалом На многообразии M, а вместо характеристического векторного поля рассматривать произвольное векторное поле, проекция которого на рабочее расслоение отлична от нуля всюду на M. Однако, если характеристическое векторное поле всегда отлично от нуля в каждой точке из M, то на M не всегда могут существовать другие всюду отличные от нуля векторные поля.

5. Лежандровы кривые

Здесь мы рассмотрим одномерные лежандровы подмногообразия, то есть лежандровы кривые.

Пусть (α, D, Φ, g) – аффинорная метрическая структура с нетривиальным радикалом на многообразии M класса C^∞. Очевидно, что любое векторное поле $X \in C^\infty(D)$ в окрестности каждой точки $x \in M$ порождает лежандрову кривую в . Кроме того, лежандрову кривую в окрестности каждой точки порождает любое векторное поле на M, проекция которого на рабочее расслоение не равна 0. Также, любая кривая, лежащая в лежандровом подмногообразии, есть лежандрова кривая. В частности, граница лежандрова двумерного подмногообразия с краем есть лежандрова кривая. Из примера 4.7 и замечания 4.8 получаем:

Следствие 5.1. Пусть (α, D, Φ, g) – нестрогая аффинорная метрическая структура с нетривиальным радикалом на многообразии M, и ξ – проекция ее характеристического векторного поля на рабочее расслоение D. Тогда:

1) Векторные поля ξ и $\Phi\xi$ в окрестности каждой точки $x \in M$ порождают ортогональные относительно римановой метрики g лежандровы кривые, выходящие из точки x;

2) Если векторные поля ξ и $\Phi\xi$ порождают инволютивное распределение на M, то через каждую точку $x \in M$ проходит лежандрова комплексная кривая Q_x.

Замечание 5.2. Из предложения 4.3 и свойств аффинора в предложении 2.4 следует, что для строгой аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, g) на многообразии M для любого векторного поля X, отличного от 0 в каждой точке из M, Векторные поля X и ΦX в окрестности каждой точки $x \in M$ порождают пару ортогональных лежандровых кривых, выходящих из точки x, но не порождают комплексную лежандрову кривую, выходящую из точки x.

Пусть (α, D, Φ, g) – аффинорная метрическая структура на многообразии M размерности $n \geqslant 3$ с неинволютивным рабочим расслоением и радикалом ранга $r \geqslant 1$. Тогда в окрестности каждой точки $x \in M$ существует локальный ортонормированный относительно метрики g базис $e_1, \ldots, e_r$ распределения $\operatorname{rad} \alpha$. Из замечания 2.6 получаем, что в некоторой окрестности точки x любая гладкая лежандрова кривая $\gamma(t)$ с началом в точке x задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$g(\dot{\gamma}(t), e_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, r.$$

Если дополнить этот базис до ортонормированного локального базиса касательного расслоения TM, считая, что последние r базисных векторных полей есть $e_1, \ldots, e_r$, то получаем:

$$x_{n-r+1}, (t) = x_{n-r+2}(t) = \ldots = x_n(t) = 0,$$

где $x_k(t)$ – k-тая координата кривой $\gamma(t)$. Отсюда получаем:

Предложение 5.3. *Пусть (α, D, Φ, g) – аффинорная метрическая структура с неинволютивным рабочим расслоением и радикалом ранга $r \geqslant 1$ на многообразии M размерности $n \geqslant 3$. Тогда для любой точки $x \in M$ и любой гладкой лежандровой кривой $\gamma(t) : \gamma(0) = x$ существует открытая окрестность U и локальные координаты $x_1, \ldots, x_n)$ в окрестности U, в которых кривая $\gamma(t)$ имеет вид $(x_1(t), \ldots, x_{n-r}(t), 0, \ldots, 0)$.*

Из предложения 5.3 следует, что объединение всех лежандровых кривых,выходящих из одной точки, для аффинорной метрической структуры с неинволютивным рабочим расслоением образует пространство размерности $n - r$, а из предложения 4.1 следует, что это пространство не может быть многообразием. Таким образом получаем:

Следствие 5.4. Объединение всех лежандровых кривых, выходящих из одной точки, для любой аффинорной метрической структуры с неинволютивным рабочим расслоением D не допускает структуру многообразия. Однако всегда содержит лежандрово подмногообразие размерности $k : 1 \leqslant k \leqslant \frac{\mathrm{rank}(D)}{2}$.

Замечание 5.5. Поскольку рабочее расслоение аффинорной метрической структуры с нулевым радикалом на многообразии M совпадает с касательным расслоением TM, следствие 5.4 дает, что для любой аффинорной метрической структуры с неинволютивным рабочим расслоением, в частности, для строгой аффинорной метрической структуры, объединение всех лежандровых кривых, выходящих из одной точки, образует собственное подмножество многообразия M, которое не является подмногообразием.

Пусть $\gamma_1(t),\ t \in [0,1],\ x = \gamma_1(0) = \gamma_1(1)$ – лежандрова петля на многообразии M, и $\gamma_2(t),\ x = \gamma_2(0) = \gamma_2(1)$ – гомотопная ей петля на M. Изучим вопрос, когда петля $\gamma_2(t)$ также является лежандровой кривой.

Предложение 5.6. *Пусть (α, D, Φ, g) – аффинорная метрическая структура на многообразии M размерности $\geqslant 3$, $\gamma(t)$ – нетривиальная лежандрова гладкая петля на M с началом в точке x, и $\dot\gamma(t)$ – векторное поле скоростей кривой $\gamma(t)$. Тогда векторное поле $\Phi\dot\gamma(t)$ порождает лежандрову петлю с началом в точке x, гомотопную петле $\gamma(t)$.*

Доказательство. Обозначим через id поле тождественных линейных операторов на M. Рассмотрим однопараметрическое семейство полей эндоморфизмов касательных пространств

$$\Phi_s = s\Phi + (1-s)\,\mathrm{id}, s \in [0,1].$$

Риманова метрика g из аффинорной метрической структуры позволяет определить на M локальные геодезические и экспоненциальное отображение $\exp : T_xM \to M$. Тогда отображение $F(s,t) = \exp(\Phi_s\dot\gamma(t))$ есть непрерывное отображение $[0,1] \times [0,1] \to M$. При этом, для любого s

$$F(s,0) = \exp(\Phi_s\dot\gamma(0)) = \exp(\Phi_s\dot\gamma(1)) = F(s,1),$$

И $\frac{d}{dt}F(1,t) = \Phi\dot\gamma(t) \in C^\infty(D)$. Получаем, что кривая $\gamma_1(t) = F(1,t)$ есть лежандрова петля с началом в точке $x = \gamma(0)$, гомотопная лежандровой петле $\gamma(t)$. □

Пусть (α, D, Φ, g) – аффинорная метрическая структура на многообразии M с неинволютивным рабочим расслоением D. Заметим, что тривиальная петля $\gamma(t) = x \in M$ для любого $t \in [0,1]$ имеет нулевое векторное поле скоростей, которое принадлежит $C^\infty(D)$, а, следовательно, является лежандровой кривой. Пусть $\Pi_1(M)$ – первая фундаментальная группа многообразияM. Легко проверить, что лежандровы петли из $\Pi_1(M)$ образуют подгруппу. Обозначим эту подгруппу через $\Pi L_1(M)$. Подгруппа состоит из классов гомотопных лежандровых петель на M, то есть, элементом этой подгруппы является класс всех лежандровых петель, гомотопных некоторой лежандровой петле. Теперь получаем:

Предложение 5.7. *Если многообразие M допускает аффинорную метрическую структуру с неинволютивным рабочим расслоением, в частности, строгую аффинорную метрическую структуру, то любая петля на M гомотопна лежандровой петле тогда и только тогда, когда $\Pi_1(M) = \Pi L_1(M)$.*

Следствие 5.8. Если многообразие M допускает аффинорную метрическую структуру с неинволютивным рабочим расслоением, для которой подгруппа $\Pi L_1(M)$ состоит только из тривиальной петли, то любая лежандрова петля на M стягиваема, то есть гомотопна точке.

Индексом нормальной подгруппы H в группе $\Pi_1(M)$ называется количество образующих в $\Pi_1(M)$, порождающих разные классы смежности по подгруппе H. Группа $\Pi_1(M)$ свободно действует на универсальной накрывающей $\tilde{M}$ для многообразия M, и фактор $\tilde{M}$ по действию подгруппы H есть k-листное накрытие многообразия M, где k – индекс подгруппы H (подробнее см. в [9]). Отсюда получаем:

Предложение 5.9. *Если многообразие M допускает аффинорную метрическую структуру с неинволютивным рабочим расслоением, в частности, строгую аффинорную метрическую структуру, и $\Pi L_1(M)$ – нормальная подгруппа индекса k в $\Pi_1(M)$, то для многообразия M существует k-листное накрытие. При $k = 1$ M может быть не односвязным, но любая петля на M гомотопна лежандровой петле.*

Замечание 5.10. Предложение 5.6 позволяет ввести отношение эквивалентности для касательных векторов к лежандровым петлям для аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, g) на многообразии M, считая, что касательные вектора v и w эквивалентны, если $w = \Phi v$. После факторизации по этому отношению эквивалентности размерность касательного пространства для подгруппы $\Pi L_1(M)$ в начальной точке не превосходит $\frac{\mathrm{rank}(D)}{2}$.

6. Однородные лежандровы подмногообразия

Однородные пространства и группы Ли являются важными классами многообразий, поэтому здесь мы рассмотрим их отдельно. На таких многообразиях можно определить специальный класс аффинорных метрических структур, для которых все свойства не зависят от точки многообразия и должны быть изучены только в одной его точке.

Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, и A – линейный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Аффинорная метрическая структура (α, D, Φ, B) на группе Ли G называется A-инвариантной, если $\alpha \circ A = \alpha$, $B \circ A = B$, $\Phi \circ A = A \circ \Phi$, и подпространство D инвариантно относительно действия автоморфизма A. Структура называется левоинвариантной, если A есть дифференциал отображения левого сдвига $L_g : L_g(x) = gx, g \in G$, правоинвариантной, если A есть дифференциал отображения правого сдвига $R_g : R_g(x) = xg, g \in G$, и биинвариантной, если A есть дифференциал внутреннего автоморфизма группы G $A_g : A_g(x) = gxg^{-1}, g \in G$. Для левоинвариантной или правоинвариантной аффинорной метрической структуры ее значение в любой точке $g \in G$ совпадает с ее значением в единице группы e, поэтому достаточно рассматривать аффинорную метрическую структуру $(\alpha_e, D_e, \Phi_e, B_e)$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Далее будем использовать обозначение $\mathrm{Ad}_g = dA_g = dL_g \circ dr_{g^{-1}}$.

Пусть $M = G/H$ – однородное пространство, где G – связная группа Ли, действующая на многообразии M эффективно и транзитивно, H – связная подгруппа изотропии начальной точки O, и $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли подгруппы изотропии H. Левоинвариантная аффинорная метрическая структура (α, D, Φ, B) на группе Ли G называется изотропно вырожденной, если $\mathfrak{h} \subseteq \mathrm{rad}\,\alpha$. Аффинорная метрическая структура на однородном многообразии $M = G/H$ называется G-инвариантной, если она A-инвариантна и A есть дифференциал отображения $g : M \to M, g \in G$. В [10] показано, что G-инвариантная аффинорная метрическая структура на однородном пространстве $M = G/H$ поднимается до G-левоинвариантной H-правоинвариантной изотропно вырожденной аффинорной метрической структуры на группе Ли G и обратно, G-левоинвариантная H-правоинвариантная изотропно вырожденная аффинорная метрическая структура на группе Ли G индуцирует G-инвариантную аффинорную метрическую структуру на однородном пространстве $M = G/H$. При этом алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли подгруппы изотропии H, а $\mathfrak{p}$ – Ad_H-инвариантное подпространство, ортогональное $\mathfrak{h}$ относительно левоинвариантной метрики B. Кроме того, из определения G-инвариантной аффинорной метрической структуры на однородном пространстве $M = G/H$ следует, что группа Ли G есть группа изометрий римановой метрики B, а H есть компактная подгруппа изоморфная подгруппе ортогональных линейных операторов в векторном пространстве D_O (подробнее см. [5]). Поскольку G-инвариантная 1-форма на однородном пространстве $M = G/H$ отлична от нулевой во всех точках, характеристическое векторное поле G-инвариантной аффинорной метрической структуры всюду отлично от 0 на однородном пространстве M. Так как любое однородное пространство является многообразием без края, из предложения 3.8 и следствия 3.9 получаем:

Следствие 6.1. Пусть $M = G/H$ – однородное пространство размерности $\geqslant 3$. Если выполнено одно из условий:

1) Многообразие M имеет ненулевой класс Эйлера;

2) M есть компактное многообразие с положительной эйлеровой характеристикой,

То на M не существует G-инвариантных аффинорных метрических структур.

n-мерная сфера S^n есть компактное однородное пространство. В [10] доказано, что на S^n при $n \geqslant 3$ не существует инвариантных аффинорных метрических структур. Также в [10] доказано, что четырехмерное однородное пространство $M = G/H$ допускает инвариантную аффинорную метрическую структуру только при $H = \{e\}$, то есть только в случае группы Ли.

Пусть ξ – характеристическое векторное поле G-инвариантной аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, B) на однородном пространстве $M = G/H$. Поскольку G есть группа изометрий римановой метрики B, однопараметрическая подгруппа порожденная векторным полем ξ также есть группа изометрий этой метрики, то есть ξ – киллингово векторное поле. Аффинорная метрическая структура с киллинговым характеристическим векторным полем называется K-аффинорной метрической структурой. Как видим, любая инвариантная аффинорная метрическая структура является K-аффинорной. Объединяя результаты из § 3 и результаты, доказанные в [3] для K-аффинорных метрических структур, получаем:

Теорема 6.2. *Пусть (α, D, Φ, B) – G-инвариантная аффинорная метрическая структура с характеристическим векторным полем ξ на однородном пространстве $M = G/H$, ∇ – ковариантная производная для связности Леви-Чивитты римановой метрики B, и $\mathrm{L}_\xi\,\alpha$ – производная Ли 1-формы α вдоль векторного поля ξ. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\xi \in \operatorname{rad}\alpha$;

2) $D \subseteq \ker\alpha$;

3) $\nabla_\xi \xi = 0$;

4) $\Phi = \nabla\xi$;

5) $\mathrm{L}_\xi\,\alpha = 0$.

Предложение 6.3. *Пусть $M = G/H$ – однородное пространство с начальной точкой O, и (α, D, Φ, B) – G-левоинвариантная H-правоинвариантная изотропно вырожденная аффинорная метрическая структура на группе Ли G. Тогда M допускает однородные лежандровы подмногообразия размерности $k \geqslant 1$ с начальной точкой O тогда и только тогда, когда рабочее расслоение D содержит подалгебру Ли размерности k.*

Доказательство. Пусть D_O – слой рабочего расслоения для G-инвариантной аффинорной метрической структуры в начальной точке O, полученной из аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, B), и e – единица группы G. Если Π – проекция $G \to M$, то $d\Pi(D_e) = D_O$. Это задает соответствие между G-инвариантным рабочим расслоением на M и левоинвариантным рабочим расслоением на G. Любое однородное подмногообразие

$N \subset M$ с начальной точкой O имеет вид $N = K/H$, где K – связная собственная подгруппа в G. Отсюда $K = QH$, где Q – подгруппа в G, такая что ее алгебра Ли $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ – Ad_H-инвариантное подпространство из разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$. Поскольку D есть Ad_H-инвариантное подпространство в $\mathfrak{p}$ (см. [10]), получаем, что однородное подмногообразие N является лежандровым тогда и только тогда, когда $\mathfrak{q}$ есть подалгебра в D. Кроме того, из построения подгруппы Q следует, что $\dim(N) = \dim(\mathfrak{q})$. □

Из предложения 4.1 и теоремы 6.2 получаем:

Следствие 6.4. Пусть (α, D, Φ, B) – G-инвариантная аффинорная метрическая структура с радикалом ранга $r \geqslant 1$ на однородном пространстве $M = G/H$ размерности $n \geqslant 5$ с начальной точкой $\emptyset$. Если выполнено одно из условий теоремы 6.2, то размерность любого однородного лежандрова подмногообразия с начальной точкой $\emptyset$ не превышает $\frac{n-r}{2}$.

Пример 6.5. Пусть $M = G/H$ – однородное пространство размерности $\geqslant 5$, и (α, D, Φ, B) – G-левоинвариантная H-правоинвариантная аффинорная метрическая структура на группе Ли G. Явные примеры таких структур можно найти в [2] и [10]. Каждое левоинвариантное векторное поле $X \in C^\infty(D)$ порождает однопараметрическую подгруппу $G_X(t) \subset G$. Пусть $\mathfrak{q}$ – подалгебра размерности k в D. Выберем в $\mathfrak{q}$ базис $e_1, \ldots, e_k$. Этот базис порождает в G трансверсальные однопараметрические подгруппы $G_1(t_1), \ldots, G_k(t_k)$. Тогда $Q = \prod_{j=1}^k G_j(t_j)$ есть k-мерная подгруппа в G с алгеброй Ли $\mathfrak{q} \subset D$. По предложению 6.3. получаем, что $N = Q/H$ есть лежандрово однородное подмногообразие размерности k с начальной точкой O в M.

Замечание 6.6. Из теоремы 2.2 следует, что для любой аффинорной метрической структуры с неинволютивным рабочим расслоением на многообразии размерности $\leqslant 4$ рабочее расслоение имеет только ранг 2. Следовательно, на многообразиях размерности $\leqslant 4$ не может существовать лежандровых подмногообразий размерности больше 1.

Пусть $M = G/H$ – симметрическое пространство размерности $\geqslant 5$. Для симметрического пространства разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$ обладает свойствами:

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{h}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{p}.$$

Отсюда следует, что подпространство $\mathfrak{p}$ не содержит подалгебр размерности больше 1. Теперь из предложения 6.3 получаем:

Следствие 6.7. Если симметрическое пространство M допускает инвариантную аффинорную метрическую структуру, то в M не существует однородных лежандровых подмногообразий размерности $\geqslant 2$.

Таким образом, симметрическое пространства любой размерности есть пример однородного пространства, не допускающего лежандровых однородных подмногообразий размерности больше 1.

Список литературы

[1] Blair D. E. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manyfolds*, Birkhauser, Boston, (2010).

[2] Корнев Е. С. *Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли* Сиб. матем. журн. 53 (1), 107-123, (2012).

[3] Корнев Е. С. *Аффинорные структуры на векторных расслоениях* Сиб. матем. журн. 55 (6), 1283-1296, (2014).

[4] Корнев Е. С. *Субкэлеровы и сублагранжевы подмногообразия* Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. №84, 23-35, (2023).

[5] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии* В 2 т. Москва: Наука, (1981).

[6] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа* Москва: Наука, (1981).

[7] Милнор Дж., Сташеф Дж. *Характеристические классы* Москва: Мир, (1979).

[8] Boothby W., Wang H. *On contact manifolds* Annals of Math. 68, 721-734, (1958).

[9] Борисович Ю. Г., Близняков Н. М. *Введение в топологию* Москва: Наука, (1995).

[10] Корнев Е. С., Славолюбова Я. В. *Инвариантные аффинорные и субкэлеровы структуры на однородных пространствах*, Сиб. матем. журн. 57 (1), 67-84, (2016).

References

[1] Blair D. E. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manyfolds*, Birkhauser, Boston, (2010).

[2] Kornev E. S. *Invariant Affinor Metric Structures On Lie Groups* Sib. Matem. Jour. 53 (1), 107-123, (2012).

[3] Kornev E. S. *Affinor Structures On Vector Bundles* Sib. Matem. Jour. 55 (6), 1283-1296, (2014).

[4] Kornev E. S. *Sub-Kahler And Sub-Lagrangian Submanifolds* Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Mathematics And Mechanics. № 84, 23-35, (2023).

[5] Kobayasi sh., Nomidzu K. *Foundations Of Differential Geometry* In 2 T. Moscow: Nauka, (1981).

[6] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elements of functions theory and funcional analisis* Moscow: Nauka, (1981).

[7] Milnor J., Stashief J. *Characteristic Classes* Moscow: Mir, (1979).

[8] Boothby W., Wang H. *On contact manifolds* Annals of Math. 68, 721-734, (1958).

[9] Borisovich yu. g., Bliznyakov N. M. *Introduction to topology* Moscow: Nauka, (1995).

[10] Kornev E. S., Slavolyubova Ya. .V. *Invariant affinor and sub-Kahler structures on homogeneous spaces* Sib. Matem. Jour. 57 (1), 67-84, (2016).

Сведения об авторе

Корнев Евгений Сергеевич, Кемеровский государственный университет, 650043, Кемерово, ул. Красная, 6. E-mail: q148@mail.ru

Kornev Evgeniy Sergeevich, Kemerovo State University, Kemerovo, 650043, Krasnaya Street, 6. E-mail: q148@mail.ru

Legendrian Submanifolds

Kornev E. S.

Annotation.

This work considers a submanifolds those at each point touch the work distribution of affinor metric structure. This distribution is generalization of contact distribution from contact metric structure, and affinor metric structure is generalization of contact metric structure for manifolds having arbitrary dimension. Such submanifolds are called a Legendrian submanifolds. We consider a Legendrian submanifolds having the general view as well as their particular cases: Legendrian curves and homogeneous Legendrian submanifolds.

Keywords: Affinor metric structure, 1-form with nontrivial radical, Legendrian submanifold, Legendrian curve, homogeneous space.