

Научная статья

УДК 94(47):514.763

DOI:10.14258/izvasu(2024)1-00

Однородные эрмитовы пространства и субвисторные структуры

Евгений Сергеевич Корнев¹,

¹Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия,
q148@mail.ru

Original article

Homogeneous Hermitian Spaces and Subtwistor Structures

*Evgeniy S. Kornev*¹,

¹Kemerovo State University, Kemerovo, Russia, q148@mail.ru

Аннотация

В данной работе приведены ключевые результаты, которые позволяют получать однородные эрмитовы и кэлеровы пространства с помощью субвисторных структур. Субвисторная структура связана с вырожденной кососимметричной 2-формой и римановой метрикой на многообразии. Такая структура является обобщением классических конструкций: висторной структуры, симплектической структуры и кэлеровой структуры для многообразий произвольной размерности с вырожденной кососимметричной 2-формой. Доказано, что субвисторные структуры с нулевым тензором кручения на группах Ли задают инвариантную кэлерову или эрмитову структуру на однородном пространстве, которое порождается этой субвисторной структурой. Описана важная конструкция, позволяющая получить из левоинвариантной кососимметричной вырожденной 2-формы, радикал которой есть идеал в алгебре Ли, на полупростой компактной группе Ли произвольной размерности инвариантную эрмитову структуру на однородном пространстве, полученном как фактор группы Ли по подгруппе радикала.

Ключевые слова: субвисторная структура, кэлерово многообразие, эрмитово многообразие, радикал внешней 2-формы, вырожденная 2-форма.

Abstract. This work contains the main results those allow to obtain A Hermitian and Kähler homogeneous spaces using subtwistor structures. A subtwistor structure is generated by degenerate skew-symmetric 2-form and Riemannian metric on manifold. This structure is generalization of classic constructions: twistor structure, symplectic structure, and Kähler structure for manifolds of arbitrary dimension equipped with degenerate skew-symmetric 2-form. It is proved that a subtwistor structure having the vanishing torsion tensor on a Lie group produces the invariant Hermitian structure or Kähler structure on homogeneous space which is generated by this subtwistor structure. It is given description of important construction that allows to obtain with left-invariant skew-symmetric degenerate 2-form so that its radical is ideal in a Lie algebra on a Lie group of arbitrary dimension the invariant Hermitian structure on homogeneous space, that is obtained as quotient of this Lie group by radical subgroup.

Keywords: Subtwistor structure, Kähler submanifold, Hermitian structure, Skew-symmetric 2-form radical, Degenerate 2-form.

Для цитирования: Корнев Е.С. Однородные эрмитовы пространства и субтвисторные структуры // Известия Алтайского государственного университета. 2026. №1 (000). С. 00-00. DOI:10.14258/izvasu(2025)1-00.

Введение

В теории симплектических и комплексных многообразий обычно используются невырожденные кососимметричные 2-формы, а в теории контактных многообразий 1-форма с максимально неголономным ядром. В первом случае размерность многообразия должна быть только четной, а во втором только не четной. В [1] было введено понятие субкомплексной и субкэлеровой структуры, которые обобщают классические комплексные, твисторные и кэлеровы структуры на вещественные многообразия произвольной размерности с вырожденной кососимметричной 2-формой. Для субкомплексной и субкэлеровой структуры четность размерности многообразия не играет роли. Также в [1] было дано обобщение классической твисторной структуры на многообразия произвольной размерности с вырожденной кососимметричной 2-формой. Такое обобщение называется субтвисторной структурой. В [2] было введено понятие тензора кручения субтвисторной структуры и показано, что субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и нулевым тензором кручения всегда индуцирует кэлерову структуру на некотором интегральном подмногообразии. Такая структура называется субкэлеровой структурой. В [3] изучен вопрос, когда левоинвариантная вырожденная замкнутая кососимметричная 2-форма Ω на группе Ли G задает инвариантную симплектическую структуру на однородном пространстве G/H , где H подгруппа, порожденная радикалом 2-формы Ω . В данной работе эти идеи обобщены и сведены вместе, что позволяет описать способ получения с помощью субтвисторных структур на группах Ли инвариантные эрмитовы и кэлеровы однородные пространства. Ключевым результатом здесь является способ получения однородных эрмитовых и кэлеровых пространств из групп Ли, допускающих левоинвариантную субтвисторную структуру. В частности, левоинвариантная субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и нулевым кручением порождает однородное кэлерово пространство (следствие 10), а биинвариантная кососимметричная 2-форма Ω на вещественной группе Ли G , такая, что ее радикал есть нетривиальная подалгебра в алгебре Ли группы G , порождает эрмитово, но не кэлерово, однородное пространство (теорема 13). Главным итогом этой работы является описание хорошего метода, который позволяет получать эрмитовы и кэлеровы однородные пространства с помо-

For citation: Kornev E. S. Homogeneous Hermitian Spaces and Subtwistor Structures. *Izvestiya of Altai State University*. 2026. No 1 (000). P. 00-00. (In Russ.). DOI:10.14258/izvasu(2025)1-00.

щью субтвисторных структур на группах Ли произвольной размерности.

1. Инвариантные субтвисторные структуры

Пусть G – вещественная группа Ли размерности ≥ 3 , $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, и Ω – левоинвариантная билинейная форма на G . Внутренним произведением билинейной формы Ω и векторного поля X называется 1-форма $I_X\Omega$, такая, что для любого векторного поля $Y \in \mathfrak{g}$ $I_X\Omega(Y) = \Omega(X, Y)$.

Определение 1. Радикалом левоинвариантной билинейной формы Ω на группе Ли G называется подпространство

$$\text{rad } \Omega = \{X \in \mathfrak{g} : I_X\Omega = 0\}.$$

Сразу из определения следует, что левоинвариантная билинейная форма Ω не вырождена тогда и только тогда, когда $\text{rad } \Omega = \{0\}$, а радикал нулевой левоинвариантной билинейной формы есть вся алгебра Ли $\mathfrak{g}$. Используя результаты доказанные в [1] для радикала кососимметричной регулярной 2-формы для многообразий, для групп Ли получаем:

Теорема 2. Пусть G – вещественная группа Ли размерности $n \geq 3$, и Ω – левоинвариантная ненулевая кососимметричная 2-форма с радикалом размерности r на G . Тогда:

- 1) Если n четно, то и r четно, и $0 \leq r \leq n-2$;
- 2) Если n не четно, то и r не четно, и $1 \leq r \leq n-2$;
- 3) Если $d\Omega = 0$, то $\text{rad } \Omega$ есть подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Из пунктов 1 и 2 этой теоремы следует, что для любого дополнительного к $\text{rad } \Omega$ подпространства на G его размерность всегда равна $n-r$, то есть всегда четна, вне зависимости от четности числа n . Кроме того, любая ненулевая левоинвариантная 2-форма на группе Ли размерности 2 всегда невырождена, то есть имеет нулевой радикал.

Пусть Ω – ненулевая кососимметричная левоинвариантная 2-форма на группе Ли G . Рабочим расслоением для Ω называется дополнительное к $\text{rad } \Omega$ подпространство. Как было показано выше, рабочее расслоение всегда имеет четную размерность на группе Ли любой размерности, а значит слои рабочего расслоения всегда имеют комплексную структуру, симплектическую и кэлерову структуру, как векторные пространства четной размерности. Поскольку любая группа Ли допускает левоинвариантную риманову метрику β ,

то рабочее расслоение можно однозначно определить как ортогональное относительно метрики β дополнение к подпространству $\text{rad } \Omega$.

Определение 3. Пусть Ω – левоинвариантная кососимметричная 2-форма на группе Ли G с рабочим расслоением D , и β – левоинвариантная риманова метрика на G . Аффинором, ассоциированным с 2-формой Ω , называется эндоморфизм Φ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, такой, что

$$\begin{aligned}\Omega(X, Y) &= \beta(\Phi X, Y), X, Y \in \mathfrak{g}, \\ \beta(\Phi X, \Phi Y) &= \beta(X, Y), X, Y \in D.\end{aligned}$$

В [1] получены следующие свойства аффинора:

Предложение 4. Пусть Ω – вырожденная левоинвариантная кососимметричная 2-форма на группе Ли G размерности ≥ 3 с рабочим расслоением D , и Φ – ассоциированный с 2-формой Ω аффинор. Тогда:

- 1) $\ker \Phi = \text{rad } \Omega$;
- 2) $\Phi^2|_D = -\text{id}$, где id – тождественный оператор в $\mathfrak{g}$;
- 3) $\Omega \circ \Phi = \Omega$;
- 4) Для любого $X \in \mathfrak{g}$ $\Omega(X, \Phi X) \geq 0$.

Отсюда видно, что аффинор, ассоциированный с кососимметричной 2-формой, есть обобщение понятия почти комплексной структуры, ассоциированной с симплектической структурой на четномерных многообразиях. В частности, когда $\text{rad } \Omega = \{0\}$ аффинор есть классическая почти комплексная структура, сохраняющая невырожденную 2-форму Ω . В [1] доказано, что любой эндоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для которого выполняются все свойства из предложения 4, удовлетворяет определению 3, то есть, является аффинором. Теперь мы можем определить понятие субтвисторной структуры.

Определение 5. Пусть S – группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вещественной группы Ли G размерности ≥ 3 . S -инвариантной субтвисторной структурой на группе Ли G называется набор объектов (Ω, D, Φ, β) , где Ω – ненулевая кососимметричная 2-форма на G , D – рабочее расслоение для 2-формы Ω , Φ – аффинор, ассоциированный с 2-формой Ω , β – риманова метрика на G , и для любого автоморфизма $A \in S$ $\Omega \circ A = \Omega$, $\beta \circ A = \beta$, подпространство D есть A -инвариантное подпространство в $\mathfrak{g}$, $\Phi \circ A = A \circ \Phi$.

Субтвисторная структура называется левоинвариантной (правоинвариантной), если $A = dL_g$ ($A = dR_g$), где dL_g – дифференциал левого сдвига группы G на элемент $g \in G$, dR_g – дифференциал правого сдвига на элемент $g \in$

G . Субтвисторная структура называется Ad_H -инвариантной, если $A = \text{Ad}_h = dA_h$, где H – подгруппа в G , dA_h – дифференциал внутреннего автоморфизма A_h , порожденного элементом $h \in H$. Ad_G -инвариантная субтвисторная структура называется бинвариантной.

2-форма Ω называется фундаментальной 2-формой субтвисторной структуры, а подпространство D называется рабочим расслоением субтвисторной структуры.

Если $\text{rad } \Omega$ есть подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$, то $R = \exp(\text{rad } \Omega)$ есть замкнутая подгруппа в G . Эта подгруппа называется подгруппой радикала. Группа Ли G действует на левоинвариантную 2-форму Ω следующим образом:

$$g(\Omega) = \text{Ad}_g^* \Omega, \quad g \in G.$$

Обозначим через $H(\Omega)$ максимальную связную подгруппу стабилизатора 2-формы Ω относительно этого действия группы G . тогда орбита действия группы G на Ω диффеоморфна однородному пространству $G/H(\Omega)$, которое состоит из правых классов смежности элементов группы G по подгруппе $H(\Omega)$. Если $R \subseteq H(\Omega)$, и субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) G -левоинвариантна и $H(\Omega)$ -правоинвариантна, в частности $\text{Ad}_{H(\Omega)}$ -инвариантна, то эта субтвисторная структура переносится с группы Ли G на однородное пространство $M = G/R$, где она задает G -инвариантную твисторную структуру (Ω', Φ', β') . Подробное описание переноса билинейных форм с группы Ли на однородное пространство можно найти в [4]. Если $R \subseteq H(\Omega)$, и Φ' – комплексная структура на M , то (Φ', β') есть G -инвариантная эрмитова структура на M . Если $R \subseteq H(\Omega)$, $d\Omega' = 0$ и Φ' – комплексная структура на M , то (Ω', Φ', β') есть G -инвариантная кэлерава структура на M . Далее изучим, когда эти условия выполняются.

2. Случай замкнутой фундаментальной 2-формы

Теорема 6. Пусть (Ω, D, Φ, β) – левоинвариантная субтвисторная структура на группе Ли G размерности ≥ 3 с замкнутой фундаментальной 2-формой и нетривиальной подгруппой радикала R . Тогда $R \subseteq H(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли подгруппы $H(\Omega)$, $Z \in \mathfrak{h}$, и H_t – однопараметрическая подгруппа, порожденная элементом Z . Мы будем использовать известное равенство, доказательство которого можно найти в [4,5,6]: для любого $Y \in \mathfrak{g}$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{H_t} Y = [Z, Y],$$

где $[Z, Y]$ обозначает скобку Ли векторных полей Z, Y . Из условия $\text{Ad}_{H_t}^* \Omega = \Omega$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$

имеем:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{H_t}^* \Omega(X, Y) = \\ & = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Omega(\text{Ad}_{H_t} X, \text{Ad}_{H_t} Y) = \\ & = \Omega([Z, X], Y) + \Omega(X, [Z, Y]) = 0. \end{aligned}$$

Используя определение 1 и инвариантное определение внешнего дифференциала 2-формы [5], для любых $Z \in \text{rad } \Omega$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ имеем:

$$\begin{aligned} 0 = d\Omega(X, Y, Z) &= \Omega([X, Y], Z) - \Omega([X, Z], Y) + \Omega([Y, Z], X) \\ &= \Omega([X, Y], Z) + \Omega([Z, X], Y) + \Omega(X, [Z, Y]) \\ &= \Omega([Z, X], Y) + \Omega(X, [Z, Y]). \end{aligned}$$

Это означает, что порожденная Z однопараметрическая подгруппа $R_t \subset H(\Omega)$. Поскольку для любого элемента $r \in R$ существует однопараметрическая подгруппа $R_t : R_1 = r$, получаем, что для любого $r \in R$ существует $Z \in \text{rad } \Omega$, такой, что порожденная Z однопараметрическая подгруппа $R_t \subset H(\Omega)$ и $R_1 = r$. Отсюда $R \subseteq H(\Omega)$. $\square$

Замечание 7. В [7] доказано, что для субвисторной структуры с точной фундаментальной 2-формой Ω подгруппа радикала совпадает с подгруппой $H(\Omega)$. Также эти подгруппы совпадают для субвисторной структуры с замкнутой фундаментальной 2-формой на полупростой группе Ли. Однако, в общем случае можно построить примеры субвисторных структур с замкнутой фундаментальной 2-формой, для которых подгруппа радикала не совпадает с подгруппой $H(\Omega)$. Подробнее см. [3].

Определение 8. Тензором кручения субвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) на многообразии M называется тензорное поле N типа $(2, 1)$, заданное на паре векторных полей X, Y следующим образом:

$$N(X, Y) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y],$$

где $[X, Y]$ обозначает скобку Ли векторных полей X, Y .

В [2] доказано, что если ограничение тензора кручения на сечения рабочего расслоения D равно нулю, то ограничение аффинора Φ на любое интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$ есть комплексная структура на Q . Отсюда получаем:

Теорема 9. Пусть $(\Omega, D, \Phi, \beta) : d\Omega = 0$ – левоинвариантная субвисторная структура с нетривиальной подгруппой радикала R и тензором кручения N на группе Ли G размерности ≥ 3 . Если ограничение тензора N на сечения рабочего расслоения D равно нулю, то эта субвисторная структура порождает G -инвариантную кэлерову структуру на однородном пространстве G/R .

Следствие 10. Левоинвариантная субвисторная структура $(\Omega, D, \Phi, \beta) : d\Omega = 0$ с нетри-

виальной подгруппой радикала R и нулевым кручением на группе Ли G порождает кэлерово однородное пространство G/R .

В [8] введено понятие нормальной субвисторной структуры и доказано, что любая нормальная субвисторная структура имеет нулевой тензор кручения. Левоинвариантная субвисторная структура (Ω, D, Φ, β) на группе Ли G называется нормальной, если D есть идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$ $[\Phi X, Y] = \Phi[X, Y]$. Теперь, из следствия 10 получаем:

Следствие 11. Если группа Ли G размерности ≥ 3 допускает левоинвариантную нормальную субвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой и нетривиальной подгруппой радикала R , то однородное пространство G/R допускает G -инвариантную кэлерову структуру, а группа Ли G локально изометрична полупрямому произведению подгрупп $Q = \exp D$ и R .

3. Случай произвольной фундаментальной 2-формы

Пусть Ω – левоинвариантная билинейная форма на группе Ли G , и H – связная компактная подгруппа в G . Усреднением формы Ω по подгруппе H называется билинейная форма

$$\Omega_0(X, Y) = \int_H (\text{Ad}_h^* \Omega(X, Y)) \mu_h,$$

где μ_h – биинвариантная мера Хаара на подгруппе H .

Теорема 12. Пусть Ω – левоинвариантная ненулевая кососимметричная 2-форма на компактной группе Ли G размерности ≥ 3 . Если $\text{rad } \Omega$ есть идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то 2-форма Ω порождает однородное эрмитово пространство G/R , где $R = \exp(\text{rad } \Omega)$, которое диффеоморфно группе Ли, и группа G полупроста.

Доказательство. Поскольку подпространство $\text{rad } \Omega$ есть идеал в $\mathfrak{g}$, оно Ad_G -инвариантно. При усреднении 2-формы Ω по всей группе G радикал не меняется, поскольку $\text{Ad}_G(\text{rad } \Omega) = \text{rad } \Omega$. После усреднения 2-формы Ω по группе G мы получим биинвариантную 2-форму Ω_0 [4,9], такую, что $\text{rad } \Omega_0 = \text{rad } \Omega$. Поскольку $\text{rad } \Omega$ есть идеал в $\mathfrak{g}$, $\text{rad } \Omega_0$ порождает нормальную подгруппу $R = \exp(\text{rad } \Omega_0)$, и G/R диффеоморфно группе Ли. На группе G существует левоинвариантная риманова метрика β , ее всегда можно задать через симметричную положительно определенную матрицу в фиксированном базисе алгебры Ли. Усреднение билинейной формы β по всей группе G дает биинвариантную риманову метрику β_0 на G [9]. Обозначим через D ортогональное дополнение к $\text{rad } \Omega_0$ относительно метрики β_0 , поскольку метрика β_0 биинвариантна, и подпространство $\text{rad } \Omega_0$ Ad_G -инвариантно, рабочее расслоение D также Ad_G -инвариантно. Отсюда D есть идеал в алгебре

Ли $\mathfrak{g}$, и группа G полупроста, так как ее алгебра Ли есть прямая сумма идеалов.

Зафиксируем ортонормированный относительно метрики β_0 базис рабочего расслоения D . Обозначим через Φ линейный оператор в D , матрица которого в этом базисе совпадает с матрицей 2-формы Ω_0 . Продолжим Φ на подпространство $\text{rad } \Omega_0$ нулем. Нормируя при необходимости матрицу Ω_0 получаем, что $\Phi|_D = -\text{id}$. Мы получили ассоциированный с 2-формой Ω_0 аффино́р, то есть, для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\Omega_0(X, Y) = \beta_0(\Phi X, Y).$$

Используя это равенство и биинвариантность билинейных форм Ω_0, β_0 , для любого $g \in G$ получаем:

$$\begin{aligned} \beta_0(\Phi \circ \text{Ad}_g X, Y) &= \Omega_0(\text{Ad}_g X, Y) = \\ &= \Omega_0(X, \text{Ad}_g^{-1} Y) = \beta_0(\Phi X, \text{Ad}_g^{-1} Y) = \\ &= \beta_0(\text{Ad}_g \circ \Phi X, Y), \end{aligned}$$

то есть, $\Phi \circ \text{Ad}_g = \text{Ad}_g \circ \Phi$, и $(\Omega_0, D, \Phi, \beta_0)$ есть биинвариантная субвисторная структура на G с подгруппой радикала R .

Пусть G_t – однопараметрическая подгруппа, порожденная элементом $X \in \mathfrak{g}$. Для любого $Y \in \mathfrak{g}$ имеем:

$$\begin{aligned} [X, \Phi Y] &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{G_t} \circ \Phi Y = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi \circ \text{Ad}_{G_t} Y = \Phi[X, Y]. \end{aligned}$$

Мы получили нормальную субвисторную структуру $(\Omega_0, D, \Phi, \beta_0)$. Как было отмечено выше, нормальная субвисторная структура всегда имеет нулевой тензор кручения. Поскольку ограничение тензора кручения этой субвисторной структуры на сечения рабочего расслоения D совпадает с тензором Нейенхейса почти комплексной структуры Φ на однородном пространстве G/R , получаем, что построенная нормальная субвисторная структура порождает G -инвариантную эрмитову структуру на G/R , что завершает доказательство. $\square$

Из доказательства теоремы 12 вытекает более общий результат:

Теорема 13. Пусть Ω – биинвариантная кососимметричная 2-форма с нетривиальным радикалом на вещественной группе Ли G размерности ≥ 3 . Если $\text{rad } \Omega$ есть подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то 2-форма Ω порождает однородное эрмитово пространство G/R , где $R = \exp(\text{rad } \Omega)$.

Поскольку для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, из доказательства теорем 6 и 12 получаем:

Следствие 14. Если (Ω, D, Φ, β) – биинвариантная субвисторная структура на полупростой группе Ли, то $d\Omega \neq 0$.

Также из доказательства теоремы 12 вытекает следующий факт:

Следствие 15. Неполупростая, в частности разрешимая, группа Ли размерности ≥ 3 не допускает биинвариантных субвисторных структур.

Поскольку контактные метрические структуры [10,11] и аффино́рные метрические структуры [7], порождают субвисторные структуры с точной фундаментальной 2-формой, на группах ли размерности $2n+1$ не существует биинвариантных контактных метрических структур, а на группах Ли размерности $n \geq 3$ не существует биинвариантных аффино́рных метрических структур.

Заключение

Мы показали, как с помощью субвисторной структуры с нетривиальной подгруппой радикала на группе Ли можно получать однородные эрмитовы и кэлеровы пространства. Доказано, что Левоинвариантная субвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и нулевым кручением порождает однородное кэлерово пространство, а биинвариантная кососимметричная 2-форма на группе Ли, радикал которой есть нетривиальная подалгебра в алгебре Ли этой группы, порождает эрмитово, но не кэлерово однородное пространство.

Библиографический список

1. Корнев Е. С. Субкомплексные и субкэлеровы структуры // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57 №5. С. 1062-1077.
2. Корнев Е. С. Субкэлеровы и сублагранжевы подмногообразия // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. №84. С. 23-35.
3. Chu B.-Y. Symplectic Homogeneous Spaces // Trans American Mathematical Society. Vol. 197, 1974, P. 145-159.
4. Бессе А. Многообразия Эйнштейна // В 2-х т., Пер. с англ. Москва: Мир, 1990, 703 с.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии // В 2 т. Москва: Наука, 1981, 760 с.
6. Серр Ж.-П. Группы Ли и алгебры Ли // Москва: Мир, 1969, 376 с.
7. Корнев Е. С. Инвариантные аффино́рные метрические структуры на группах Ли // Сибирский математический журнал. 2012. т. 53 №1. С. 107-123.

8. Корнев Е. С. Нормальные субтвисторные структуры // Известия Алтайского государственного университета. 2024. № 4 (138). С. 69-74.

9. Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Advances in Mathematics. Vol. 21, 1976, P. 293-329.

10. Blair D. E. Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds // Birkhauser, Boston, 2010, 358 p.

11. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups // Differential Geometry and its Applications. Vol. 26, Issue 5, 2008, P. 544-552.

References

1. Kornev E. S. *Subcomplex And Sub-Kähler Structures* Siberian Mathematical Journal. 2016. Vol. 57 №5. P. 1062-1077.

2. Kornev E. S. *Sub-Kähler And Sub-Lagrangian Submanifolds* Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Mathematics And Mechanics. 2023. №84. P. 23-35.

3. Chu B.-Y. *Symplectic Homogeneous Spaces* Trans American Mathematical Society. Vol. 197, 1974, P. 145-159.

4. Besse A. *Einstein Manifolds* In 2 Vol. Moscow: Mir, 1990, 703 p.

5. Kobayashi, Nomizu K. *Foundations Of Differential Geometry*. In 2 Vol. Moscow: Nauka, 1981, 760 p.

6. Serr J.-P. *Lie Groups and Lie Algebras* Moscow: Mir, 1969, 376 p.

7. Kornev E. S. *Invariant Affinor Metric Structures On Lie Groups* Siberian Mathematical Journal. 2012. Vol. 53 № 1. P. 107-123.

8. Kornev E. S. *Normal Subtwistor Structures* Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta. 2024. № 4 (138). P. 69-74.

9. Milnor J. *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups* Advances in Mathematics. Vol. 21, 1976, P. 293-329.

10. Blair D. E. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds* Birkhauser, Boston, 2010, 358 p.

11. Diatta A. *Left invariant contact structures on Lie groups* Differential Geometry and its Applications. Vol. 26, Issue 5, 2008, P. 544-552.

Информация об авторах

Е. С. Корнев, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник научно-инновационного управления кемеровского государственного университета, Кемерово, Россия.

Information about the authors

E. S. Kornev, candidat of Physics and Mathematics, research worker of scientific-innovation department of Kemerovo State University, Kemerovo, Russia.